

Corrigé

## Optique géométrique

Rappel : les sujets ainsi que les corrigés des épreuves d'agreg sont disponibles dans les BUP, ainsi que sur internet<sup>1</sup>.

## I. RAPPELS

**1.** À la surface de séparation de deux milieux transparents et homogène d'indice  $n_1$  et  $n_2$ , appelé **dioptr**e, une partie de la lumière est réfléchi et une autre est transmise (on parle de réfraction). Ces phénomènes sont régis par les lois de *Snell-Descartes* :

- Les rayons incidents, réfléchi et réfracté ainsi que la normale au dioptr e au point d'incidence appartiennent à un même plan d'incidence,
- $i = i_r$ ,
- $n_1 \sin i = n_2 \sin i_t$ .

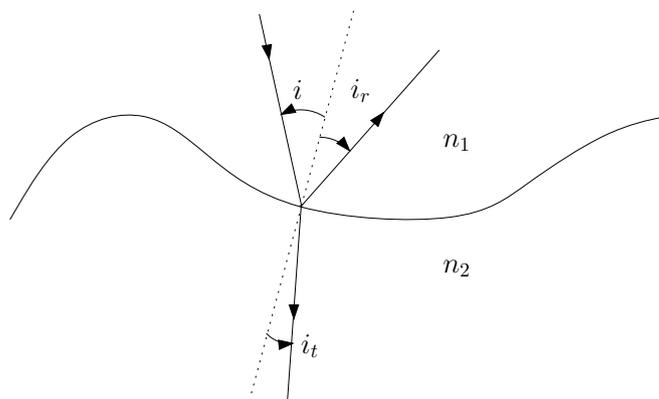


Figure 1:

**2.**

**Stigmatisme rigoureux** Un point objet émet des rayons lumineux dans toutes les directions. Ces rayons passent à travers un système optique. Si, à la sortie de celui-ci, ils se recoupent tous en un même point, on dit que le système est parfaitement stigmatique pour ce couple de points. Les deux points, objet et images, sont dits points conjugués.

Les systèmes parfaitement stigmatiques sont rares (miroirs plans pour tout point de l'espace, miroir parabolique pour son foyer et l'infini,...).

<sup>1</sup>Sujets disponibles sur <http://poisson.ens.fr/Ressources/index.php>, sujets et corrigés des trois dernières sessions sur <http://www.agregation-physique.org>.

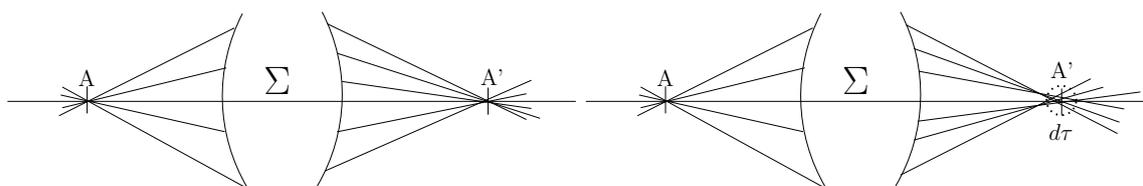


Figure 2: Système optique rigoureusement stigmatique. Système optique approximativement stigmatique.

**Stigmatisme approché** Dans la plupart des cas, les rayons ne se recoupent pas exactement en un point, mais passent dans un petit élément de volume. Si cet élément de volume reste suffisamment petit, on parle de stigmatisme approché. Si la tâche qui en résulte est plus petite que la taille du détecteur élémentaire (grain photographique, bâtonnet de l'oeil,...), l'image paraîtra nette.

### 3. Conditions de Gauss

Lorsque les rayons sont peu inclinés sur l'axe optique et que les distances transverses sont faibles par rapport aux distances longitudinales caractéristiques (distances focales ou autres), on dit qu'on est dans les conditions de Gauss.

Utilisés dans ces conditions, tous les dispositifs optiques usuels (lentilles minces, miroirs ou dioptries sphériques,...) réalisent le stigmatisme approché. Une lentille utilisée dans les conditions de Gauss est un système stigmatique (stigmatisme approché). Cette propriété est essentielle pour la formation des images.

**Relations de conjugaison :** Pour une lentille **mince** de centre optique  $O$ , de foyer image  $F'$  et de foyer objet  $F$  ( $\overline{OF'} = -\overline{OF} = f'$ ). On a  $f' > 0$  pour une lentille convergente, et  $f' < 0$  pour une lentille divergente. On a les relations de conjugaisons suivantes

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}$$

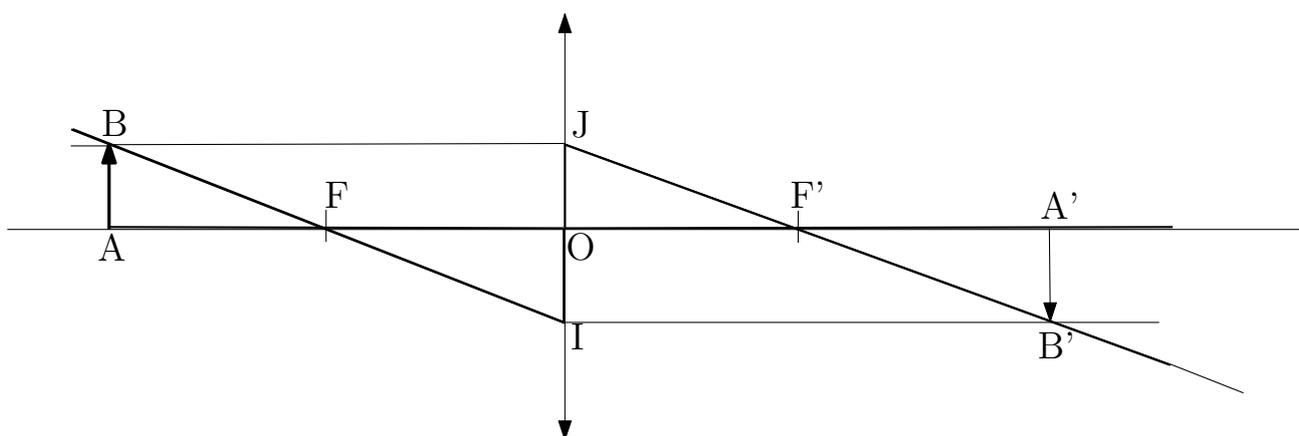


Figure 3: Relations de Newton.

**Relations de Newton :** On applique le théorème de Thalès dans les triangles  $ABF$  et  $FOI$ ,

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

ainsi que des les triangles  $A'B'F'$  et  $F'OJ$

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

En combinant les deux expressions précédentes, on obtient

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \rightarrow \overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \overline{F'O'} \cdot \overline{FO},$$

d'où les relations de Newton ( $\overline{F'O'} \cdot \overline{FO} = ff' = -f'^2$ ):

$$\boxed{\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2}.$$

#### 4. Principe du microscope

4.1.

L'œil n'accommodera pas si l'image est à l'infini. Il faut donc que l'image intermédiaire soit dans le plan focal de l'oculaire. L'idée du microscope est d'obtenir une image agrandie que l'on observe ensuite à la loupe (oculaire).

4.2.

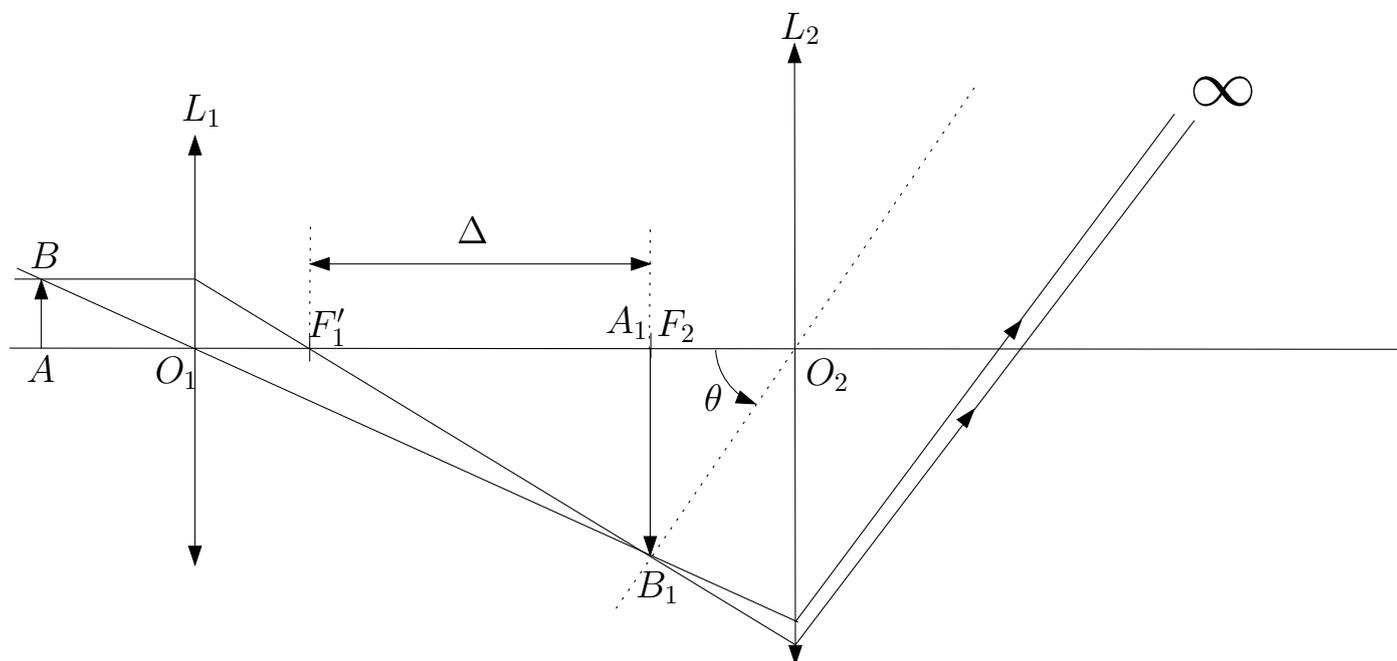


Figure 4: Modélisation d'un microscope par deux lentilles minces.

On note  $\Delta$  l'intervalle optique, défini comme la distance entre  $F_1'$  et  $A_1 \equiv F_2$ . Le grandissement transversal  $G_t$  de la lentille  $L_1$  est défini par

$$G_t = \frac{A_1 B_1}{AB}.$$

Alors, dans notre cas

$$A_1'B_1' \approx \frac{\Delta + f_1'}{f_1'} AB,$$

car pour avoir un grandissement élevé, l'objet doit être très proche du plan objet de  $L_1$  (théorème de Thalès dans  $ABO_1$  et  $O_1A_1B_1$ ). De plus, l'angle  $\theta$  sous lequel est vue l'image intermédiaire  $A_1B_1$  vaut

$$\theta = \frac{A_1B_1}{f_2'} = \frac{\Delta + f_1'}{f_1'f_2'} AB.$$

*Définition du grossissement commercial d'un microscope  $G_c$  :* Soit  $\theta$  l'angle sous lequel l'oeil voit  $A_1B_1$ . Soit  $\alpha_m$  l'angle sous lequel l'oeil voit  $AB$  à  $d_m = 25$  cm (*ponctum proximum*). Alors, par définition

$$G_c = \frac{\theta}{\alpha_m},$$

et il est trivial que

$$\alpha_m = \frac{AB}{d_m}.$$

D'où le résultat

$$G_c = \frac{(\Delta + f_1')d_m}{f_1'f_2'}.$$

Remarque 1 : En pratique,  $\Delta \gg f_1'$  et on peut simplifier l'expression en

$$G_c = \frac{\Delta d_m}{f_1'f_2'}.$$

Remarque 2 :

$$G_c = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{d_{pp}} = G_t \times \alpha_m.$$

**Le grossissement commercial du microscope est le grandissement de l'objectif multiplié par le grossissement de l'oculaire.**

## 5. Profondeur de champ

### 5.1.

Par définition, l'ouverture  $n$  est définie par

$$n = \frac{f'}{D}.$$

La profondeur de champ est par définition la distance qui sépare deux points extrêmes de l'axe optique dont les images sont vues avec une netteté suffisante sur le détecteur (pellicule, oeil, CCD,...).

### 5.2.

On considère le point  $A$  que l'on veut imager, ainsi que  $A_1$  et  $A_2$  les deux points objets extrêmes s'étalant sur une tâche de taille inférieure à  $a$  en  $A'$ . Soit  $G_t$  le grandissement transversal. On a

$$G_t \approx \frac{f'}{p} \text{ si } p \gg f',$$

approximation vérifiée en générale pour un appareil photo. On applique le théorème de Thalès dans les triangles  $A_2DE$  et  $A_2BC$  puis dans les triangles  $A_1DE$  et  $A_1BC$ . On obtient alors les relations suivantes

$$\frac{p_2 - p}{EA} = \frac{p_2}{D/2} \text{ et } \frac{p - p_1}{EA} = \frac{p_1}{D/2'}$$

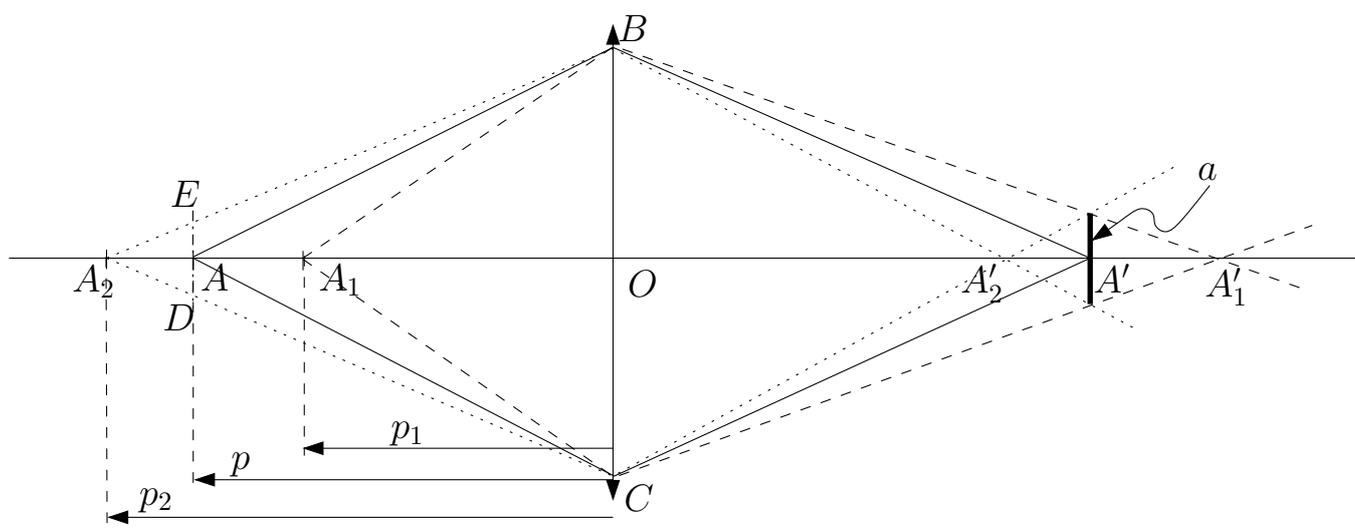


Figure 5: Profondeur de champ.

d'où

$$\frac{p_2 - p}{p_2} = \frac{p - p_1}{p_1} = \frac{2EA}{D}.$$

Or  $a = G_t(2EA)$  donc finalement

$$\frac{p_2 - p}{p_2} = \frac{p - p_1}{p_1} = \frac{a}{G_t D} = \frac{an}{G_t f'}$$

où  $n$  est le nombre d'ouverture.

On pose  $u = \frac{a}{G_t f'}$ , et on obtient

$$\frac{p_2 - p}{p_2} = \frac{p - p_1}{p_1} = nu,$$

d'où

$$\begin{cases} p_1 = \frac{p}{1+nu} \\ p_2 = \frac{p}{1-nu} \end{cases}$$

D'où la profondeur de champ  $\Delta = p_2 - p_1$

$$\Delta = \frac{2pun}{1 - u^2 n^2}.$$

De plus, si  $p \gg f$ , alors  $u \approx \frac{ap}{f^2}$ , et donc (Cf. Sextant)

$$\Delta = \frac{2p}{\frac{1}{nu} - nu}.$$

On pose

$$\alpha = \frac{1}{nu} = \frac{1}{n} \frac{f' G_t}{a} = \frac{f' p'}{n a p}.$$

Si  $p \gg p'$ , alors  $\alpha \ll 1$ , donc  $\Delta \approx 2p/\alpha$ , d'où

$$\Delta \approx \frac{2ap^2}{f' p'} n.$$

Donc, **dans le cas des grandes distances**, la profondeur de champ est proportionnelle à l'ouverture.

## II. PROPAGATION DANS UN MILIEU D'INDICE CONTINUÛMENT VARIABLE

**1.** Le principe de Fermat stipule que le trajet suivi par la lumière est celui pour lequel le chemin optique  $D$  est extrême (le plus souvent minimal), avec

$$D = \int n ds,$$

où  $n = \frac{c}{v_\varphi}$  (rapport de la vitesse de la lumière dans le vide et de la vitesse de phase dans le milieu) est l'indice optique local, et  $ds = v_\varphi dt$  l'abscisse curviligne élémentaire (la lumière "suit" le chemin le plus rapide).

En mécanique, le principe de Maupertuis, ou principe de moindre action, précise qu'un système mécanique évolue dans le temps de sorte que l'action  $\mathcal{S}$  soit extrême, avec

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dt,$$

où  $\mathcal{L}$  est le lagrangien du système. Si on appelle  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  les degrés de liberté du système, les équations de Lagrange qui déterminent son évolution sont

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right)}.$$

L'analogie avec l'optique est complète à condition de poser comme "lagrangien"  $\mathcal{L}_{\text{opt}} = nv_\varphi$ . Les équations de Lagrange s'écrivent alors, pour  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x}(nv) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(nv)}{\partial \dot{x}} \right) \iff v \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left( n \frac{\partial v}{\partial \dot{x}} \right),$$

et  $n$  est une fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$  seulement,  $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ . Or,

$$\frac{\partial v}{\partial \dot{x}} = \frac{2\dot{x}}{2v} = \frac{\dot{x}}{v} = t_x,$$

où  $t_x$  est la projection du vecteur tangent à la courbe  $\vec{f}$ . On obtient donc

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{d}{dt}(nt_x) = \frac{d}{ds}(nt_x).$$

De même

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{d}{ds}(nt_y), \\ \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{d}{ds}(nt_z). \end{cases}$$

D'où le résultat

$$\boxed{\frac{d(n\vec{t})}{ds} = \vec{\nabla} n}.$$

## III. FIBRES OPTIQUES (AGREG A 2007)

e- **Application : la fibre optique à saut d'indice.**

α) Il faut pouvoir observer un phénomène de réflexion totale sur la gaine, donc  $n_1 > n_2$

β)  $i_1 - \alpha = \pi/2$ : pour qu'il y ait réflexion totale, il faut que

$$\sin i_1 > \frac{n_2}{n_1}, \text{ donc } \cos \alpha > \frac{n_2}{n_1}. \text{ Or } \sin \theta$$

$$= n_1 \sin \alpha. \text{ Il vient donc : } \theta < \theta_{\max},$$

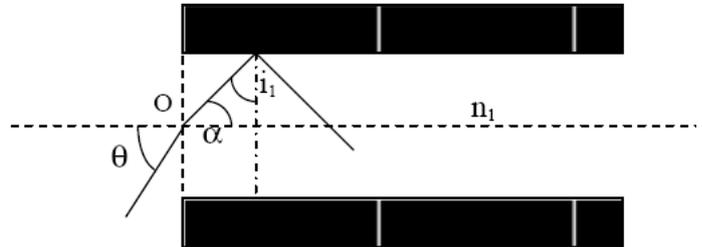
$$\text{avec } \sin \theta_{\max} = n_1 \sin(\arccos \frac{n_2}{n_1}) = n_1$$

$$\sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}} = n_1 \sqrt{2\Delta}.$$

$$\text{D'où O.N.} = n_1 \sqrt{2\Delta} = 0,21$$

γ) Si on courbe la fibre, l'angle d'incidence est modifié, et par suite  $i_1$  qui peut devenir inférieur à  $\arcsin \frac{n_2}{n_1}$ . Il y aura alors réfraction, et donc perte énergétique.

δ) Le trajet le plus rapide est celui correspondant à l'incidence nulle :  $t_{\min} = n_1 L / c$ . Le trajet le plus long est celui correspondant à l'angle d'incidence  $\theta_i$ . Ce rayon fera



$\frac{L \tan \alpha_i}{r_1}$  trajets de type OA (cf figure ci-dessus) qui prennent chacun le temps

$$n_1 \frac{r_1}{c \sin \alpha_i}. \text{ D'où } t_{\max} = \frac{L \tan \alpha_i}{r_1} n_1 \frac{r_1}{c \sin \alpha_i} = \frac{n_1 L}{c \cos \alpha_i} = \frac{n_1 L}{c \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n_1^2}}}$$

$$\text{D'où } \Delta t = \frac{n_1 L}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n_1^2}}} - 1 \right) = 0,22 \text{ ns.}$$

### I-5- Extension à un milieu non homogène : loi fondamentale de l'optique géométrique.

a- la concavité du rayon est toujours tournée dans le sens de  $\overrightarrow{\text{grad}n}$ .

**Exemple 1 :** Dans une cuve, avec un mélange d'eau et de sel qu'on a laissé reposer, la concentration, donc l'indice, croissent de la surface au fond.  $\overrightarrow{\text{grad}n}$  est donc dirigé verticalement vers le fond de la cuve. Un rayon arrivant normalement dans la cuve s'incurvera alors vers le bas.

**Exemple 2 :** Phénomène de mirage : lorsque le sol est très chaud, l'indice croît avec l'altitude  $z$ . Les rayons provenant d'un objet s'incurvent en semblant provenir du sol comme s'ils avaient subi une réflexion sur une surface réfléchissante comme de l'eau.

## b- Application : la fibre optique à gradient d'indice.

$$\alpha) \frac{d(n\vec{u})}{ds} = \vec{\text{grad}} n = \frac{dn}{dr} \vec{u}_r. \text{ Il vient donc } \frac{d}{ds}(n(r)\cos\alpha(r)\vec{u}_z + n(r)\sin\alpha(r)\vec{u}_r) = \frac{dn}{dr} \vec{u}_r$$

$$\text{Par identification, on obtient } n \cos\alpha = \text{cste} = n_1 \cos\theta_0, \text{ soit } \cos^2\alpha = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \cos^2\theta_0.$$

$$\text{Or } \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{n^2}{n_1^2 \cos^2\theta_0} - 1 = \frac{1 - 2\Delta \left(\frac{r}{r_1}\right)^2}{\cos^2\theta_0} - 1. \text{ Si on dérive cette}$$

$$\text{expression, on obtient : } \frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{2\Delta}{r_1^2 \cos^2\theta_0} r$$

$$\text{Soit } r = A \cos\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1 \cos\theta_0} z\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1 \cos\theta_0} z\right). \text{ Compte tenu des conditions en } z=0$$

$$\text{qui s'écrivent } r(z=0) = 0 \text{ et } \left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=0} = \tan\theta_0, \text{ on obtient finalement :}$$

$$r = \frac{r_1 \sin\theta_0}{\sqrt{2\Delta}} \sin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1 \cos\theta_0} z\right). \text{ La trajectoire est donc sinusoïdale, de période spatiale}$$

$$2d = 2 \frac{\pi r_1 \cos\theta_0}{\sqrt{2\Delta}}, \text{ d'où } d = \frac{\pi r_1 \cos\theta_0}{\sqrt{2\Delta}}.$$

β) Il faut que  $r_{\max} < r_1$ , soit  $\sin\alpha_0 < \sqrt{2\Delta}$ , soit finalement  $\sin\alpha < n_1 \sqrt{2\Delta} = \text{O.N.}$  On retrouve donc la même valeur que dans la fibre à saut d'indice : l'intérêt d'une fibre à gradient d'indice ne réside donc pas dans l'ON.

γ)  $\Delta t' = 0,46 \cdot 10^{-12} \text{ s} \ll \Delta t$  : l'élargissement est beaucoup plus faible que dans une fibre à saut d'indice, d'où l'intérêt des fibres à gradient d'indice (qui ne réside pas dans l'O.N) pour le transport d'information avec des hauts débits.

δ) Fibroscopie, endoscopie, communication, réseau câblé...

This work is licensed under a Creative Commons "Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International" license.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>