

Corrigé

Diffraction (1)

I. RAPPELS

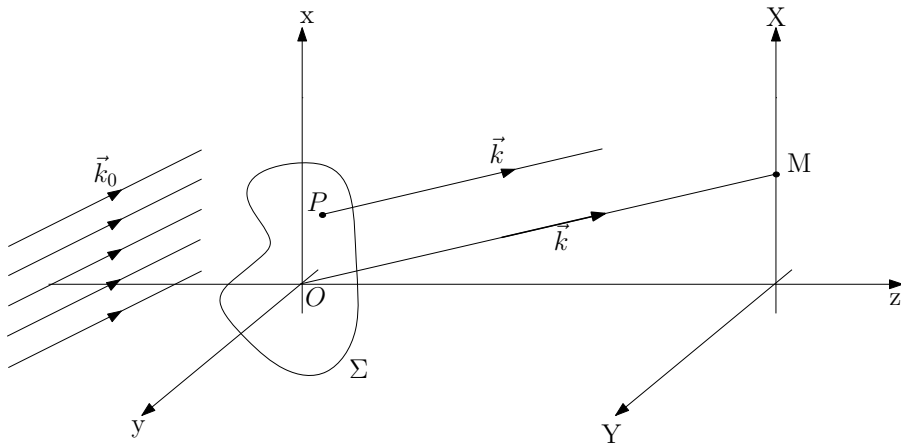


Figure 1: Géométrie considérée.

1. Principe de Huygens-Fresnel : (Cf. BFR)

Chaque point M d'une surface Σ atteinte par la lumière peut être considérée comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'état vibratoire de cette source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente en M et à l'élément de surface $d\Sigma$ entourant le point M .
Les vibrations issues des différentes sources secondaires interfèrent entre elles.

Soit P un point de la surface Σ éclairée et M un point de l'espace (point d'observation), on note θ l'angle entre la direction \vec{PM} et $d\vec{\Sigma}$ le vecteur normal à

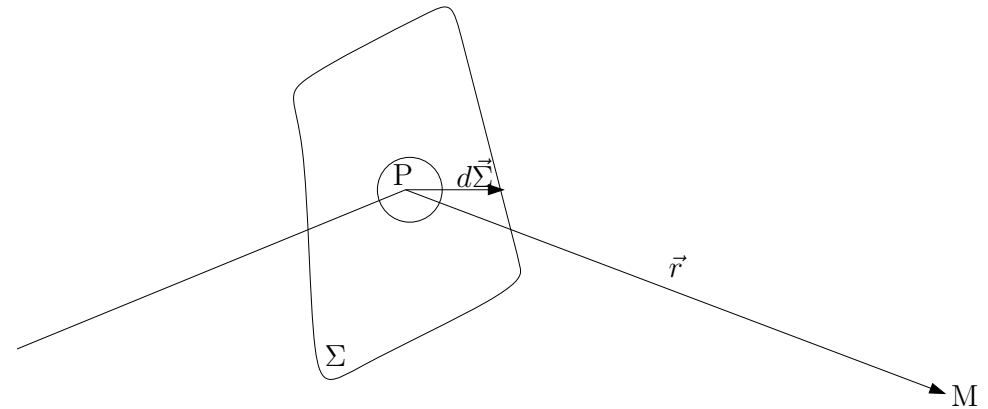


Figure 2: Principe de Huygens-Fresnel.

Σ en P . Alors

$$ds(M) = A(\theta)s(P) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \longrightarrow s(M) = \int_{\Sigma} A(\theta)s(P) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma,$$

car les différentes sources secondaires interfèrent entre elles.

En pratique, on considère des rayons faiblement inclinés, alors $A(\theta) \approx C^{te}$, soit

$$s(M) = A \int_{\Sigma} s(P) \frac{e^{ikPM}}{PM} d\Sigma.$$

2.

Si on applique Huygens-Fresnel au cas considéré (surface Σ de transmittance $t(x, y)$). Soit M un point d'observation, et P un point courant de Σ . Alors

$$s(M) \propto \int_{\Sigma} s_0(P)t(x, y) \frac{e^{ikPM}}{PM} dx dy.$$

Or $\vec{PM} = \begin{pmatrix} x - X \\ y - Y \\ D \end{pmatrix}$ et

$$PM^2 = D^2 \left(1 + \left(\frac{x - X}{D} \right)^2 + \left(\frac{y - Y}{D} \right)^2 \right),$$

soit

$$PM = D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{D} \right)^2 + \left(\frac{X}{D} \right)^2 + \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \left(\frac{Y}{D} \right)^2 - 2 \frac{xX + yY}{D^2}},$$

$$\approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{X}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{D} \right)^2 - \frac{xX + yY}{D^2} \right).$$

On pose $\alpha = \frac{X}{D}$ et $\beta = \frac{Y}{D}$ les angles directeurs de \vec{OM} , et $r^2 = x^2 + y^2$, distance de P à O. Alors

$$PM = D \left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{r^2}{2D^2} - \frac{\alpha X + \beta Y}{D} \right)$$

Hypothèses :

$$\begin{cases} \frac{x}{D}; \frac{y}{D}; \frac{r}{D} \ll 1 \text{ pupille petite,} \\ \frac{X}{D}; \frac{Y}{D} \ll 1 \text{ petits angles.} \end{cases}$$

Alors $PM \approx D$ mais **pour évaluer la phase dans kPM , il faut tenir compte des variations de PM à l'échelle de λ .**

$$e^{ikPM} \approx e^{ikD} e^{ik \frac{D}{2} (\alpha^2 + \beta^2)} \underbrace{e^{ik \frac{r^2}{2D}}}_{\text{terme quadratique en } x \text{ et } y} e^{-ik(\alpha x + \beta y)},$$

alors si

$$\boxed{kr^2 \ll D} \Leftrightarrow \boxed{D \gg \frac{r^2}{\lambda}},$$

on peut négliger le terme quadratique dans la phase. D'où

$$s(M) \propto \int_{\Sigma} s_0(P) t(x, y) \frac{e^{ikD}}{D} e^{ik \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right)} e^{-ik(\alpha x + \beta y)} dx dy.$$

La dépendance angulaire est considérée comme étant faible, donc $e^{ik \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right)}$ est une constante pour un point M donné, alors, **dans les conditions dites de Fraunhofer** $kr^2 \ll D$ (" $D \rightarrow +\infty$ "),

$$s(M) \propto \int_{\Sigma} s_0(P) t(P) e^{-ik(\alpha x + \beta y)} dx dy.$$

On peut le reformuler en introduisant $\vec{OM} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et \vec{k} le vecteur d'onde de direction \vec{OM} . Cela correspond à l'interférence entre les différents points sources secondaires en observant à l'infini. Chaque point P de Σ a un déphasage par rapport à O $\delta\varphi$

$$\delta\varphi = \vec{k} \cdot \vec{OP} = k(\alpha x + \beta y),$$

et obtient immédiatement le résultat précédent

$$s(M) \propto \int_{\Sigma} s_0(P) t(P) e^{i\delta\varphi(P)} dx dy.$$

En pratique, ces conditions sont valables pour une **observation à l'infini** et dans le cadre de la **formation des images** (d'où son importance).

3. À l'infini, dans la direction $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, ou en $\begin{pmatrix} f\alpha \\ f\beta \end{pmatrix}$ si une lentille L conjugue l'infini.

- Si $D \ll \frac{r^2}{\lambda}$, on est dans le cadre de la diffraction de Fresnel, où l'on doit tenir compte du terme quadratique,
- Si $D \gg \frac{r^2}{\lambda}$, on est dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer.

Remarque : Si on se place directement dans l'approximation de Fraunhofer, l'obtention de la formule de diffraction est beaucoup plus rapide.

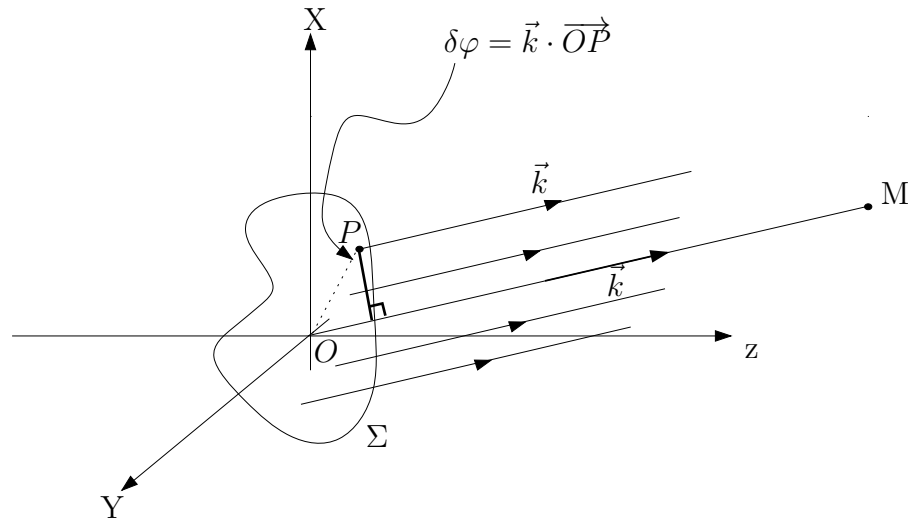


Figure 3: Calcul de l'amplitude de la vibration lumineuse en se plaçant directement dans l'approximation de Fraunhofer.

Si on observe la diffraction dans la direction \vec{k} , pour une onde plane incidente de vecteur d'onde \vec{k}_0 , on a $\vec{k} = k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$; $\alpha = \frac{X}{D}$; $\beta = \frac{Y}{D}$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $\vec{k}_0 = k \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$. D'où

$$s(M) = A \int_{\Sigma} s_0(P) t(x, y) \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{PM}}}{PM} dx dy,$$

Or $PM \approx D$, $\vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP}$, $s_0(P) = s_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{OP}}$, d'où

$$\begin{aligned} s(M) &= \frac{As_0}{D} e^{i\vec{k} \cdot \vec{OM}} \int_{\Sigma} t(x, y) e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{OP}} dx dy, \\ &= \frac{As_0}{D} e^{i\vec{k} \cdot \vec{OM}} \int_{\Sigma} t(x, y) e^{\frac{2i\pi}{\lambda} (x(\alpha - \alpha_0) + y(\beta - \beta_0))} dx dy. \end{aligned}$$

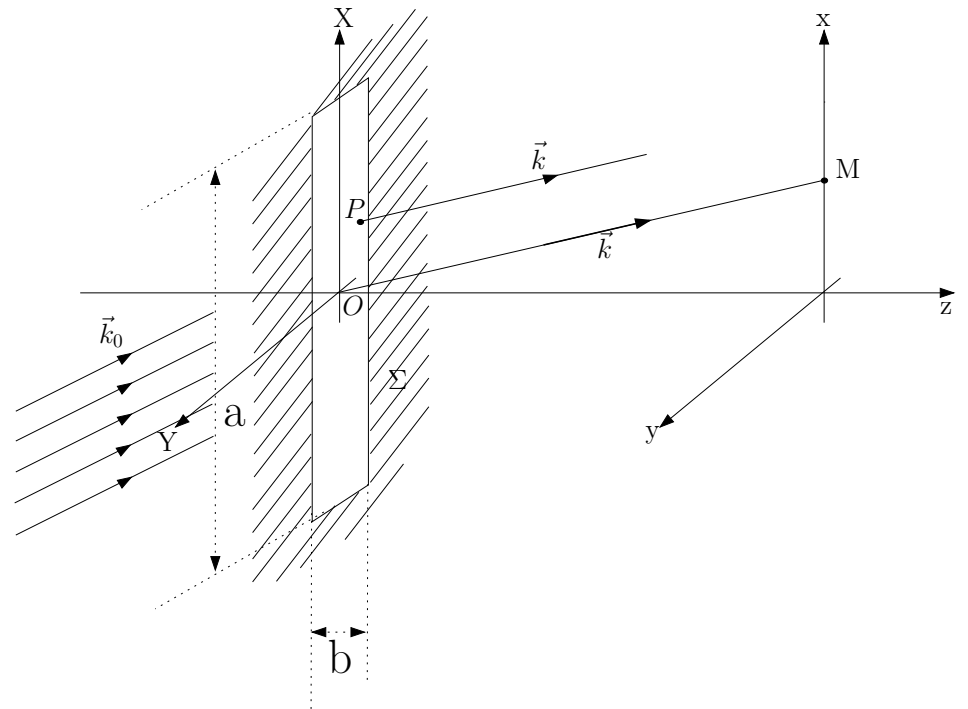


Figure 4: Diffraction par une fente rectangulaire.

4. Figure de diffraction d'une fente rectangulaire.

Dans le plan focal image de la lentille L , que l'on note Π' , on a, en $M = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\alpha \\ f\beta \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} s(M) &= s_0 \int_{-b/2}^{+b/2} dy \int_{-a/2}^{+a/2} dx e^{ik(\alpha x + \beta y)}, \\ &= s_0 \left[-\frac{1}{ik\alpha} \left(-2i \sin \frac{k\alpha a}{2} \right) \right] \left[-\frac{1}{ik\beta} \left(-2i \sin \frac{k\beta b}{2} \right) \right], \\ &= abs_0 \text{sinc} \left(\frac{\pi a X}{\lambda f} \right) \text{sinc} \left(\frac{\pi b Y}{\lambda f} \right). \end{aligned}$$

D'où le profil d'intensité

$$I(X, Y) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b Y}{\lambda f} \right).$$

5. Fente de largeur a, b . Pour une fente infiniment fine $b \rightarrow 0$, $I \rightarrow I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f} \right)$, de largeur $\frac{2\lambda f}{a}$ (première annulation en $\frac{\lambda f}{a}$) (on diffracte **perpendiculairement** à la fente).

Pour un trou de rayon a : il est compris entre une fente carrée de côté $2a$ et une autre de côté $\sqrt{2}a$. La largeur de la tâche de diffraction de ces carrés sont $\frac{\lambda f}{a}$ et $\frac{\sqrt{2}\lambda f}{a}$.

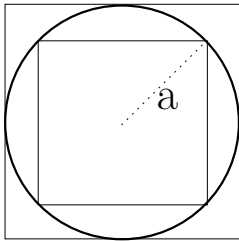


Figure 5: Un trou de rayon a est compris entre deux carrés de côté $2a$ et $\sqrt{2}a$.

Donc la largeur angulaire du rayon de la tâche de diffraction du trou de rayon a est θ tel que

$$\frac{\lambda}{a} < \theta < \frac{\sqrt{2}\lambda}{a} \rightarrow \frac{\lambda}{a} < \theta < 1.4 \frac{\lambda}{a}.$$

Donc $\theta \approx 1.22 \frac{\lambda}{a} \pm 0.2 \frac{\lambda}{a}$. Or, le calcul complet et exact fait appel aux fonctions de Bessel, il prévoit

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{a}.$$

Remarque : **Base de l'optique de Fourier.** (Cf. TD Diffraction (2)).

On a une relation de transformée de Fourier entre $t(x, y)$ et le profil d'intensité dans le plan image de L (dit **plan de Fourier**).

6. Théorème de Babinet.

Soit deux écrans de transmittance $t_1(x, y)$ et $t_2(x, y)$ complémentaires ($t_1(x, y) + t_2(x, y) = 1 \forall x, y$) Σ_1 et Σ_2 .

En dehors de l'image géométrique, les figures de diffractions données par les deux écrans sont identiques.

DÉMONSTRATION : Vibration en M pour l'écran Σ_1

$$s_{\Sigma_1}(M) = A \int_{\Sigma_1} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_1(x, y) dx dy,$$

de même pour l'écran Σ_2

$$s_{\Sigma_2}(M) = A \int_{\Sigma_2} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_2(x, y) dx dy.$$

En M , en dehors de l'image géométrique, si on n'a pas d'écran

$$I = s \cdot s^* = 0 \rightarrow s = 0.$$

Or

$$s = A \int_{\Sigma_1} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_1(x, y) dx dy + A \int_{\Sigma_2} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_2(x, y) dx dy = s_{\Sigma_1}(M) + s_{\Sigma_2}(M) = 0.$$

Donc $s_{\Sigma_1}(M) = -s_{\Sigma_2}(M)$, soit

$$I_{\Sigma_1}(M) = I_{\Sigma_2}(M).$$

II. DIFFRACTION PAR UN ENSEMBLE DE STRUCTURES

On applique le principe de Huygens-Fresnel dans l'approximation de Fraunhofer

$$s(M) = A \int_{\Sigma} s_0(P) t(P) \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{PM}}}{PM} dx dy.$$

A chaque élément diffractant $\{k\}$, on associe une transmittance $t_k(P)$ et une position P_k . On a alors $s_0(P) = s_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{OP}}$, et

$$t(P) = \sum_k t_k(P).$$

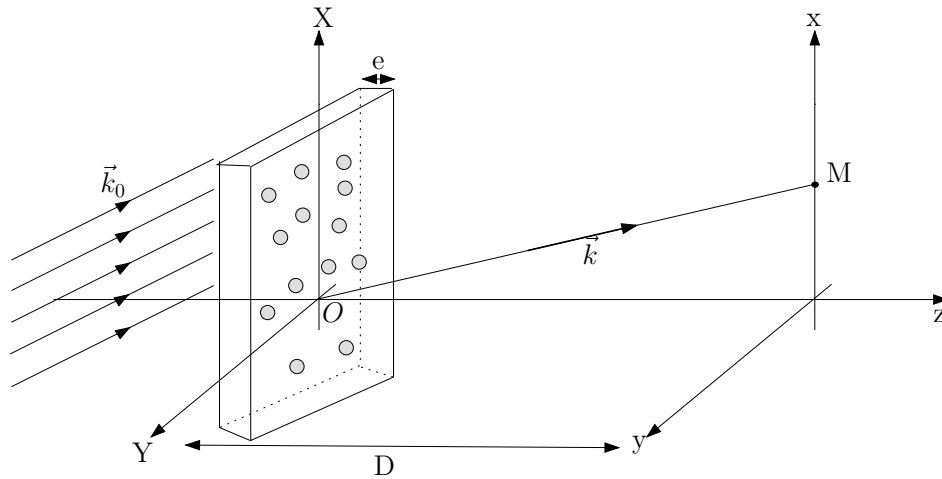


Figure 6: Diffraction par un ensemble de structures.

On note $\vec{R}_k = \vec{OP}_k$. Alors

$$\begin{cases} \vec{PM} &= \vec{PP}_k + \vec{P}_k\vec{O} + \vec{OM} = \vec{OM} - \vec{P}_k\vec{P} - \vec{R}_k, \\ \vec{OP} &= \vec{OP}_k + \vec{P}_k\vec{P} = \vec{R}_k + \vec{P}_k\vec{P}. \end{cases}$$

De plus, $PM \approx D$ (sauf dans la phase où on garde le développement limité). Alors

$$s(M) = \frac{As_0}{D} \int_{\Sigma} \sum_k t_k(P) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{R}_k} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{P}_k\vec{P}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{OM}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{P}_k\vec{P}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}_k} d\Sigma.$$

Si on note $\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$,

$$s(M) = \frac{As_0}{D} e^{i\vec{k} \cdot \vec{OM}} \sum_k \left(e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{R}_k} \underbrace{\int_{\Sigma} t_k(P) e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{P}_k\vec{P}} d\Sigma}_{\text{indépendant de } k} \right)$$

$$s(M) = \frac{As_0}{D} e^{i\vec{k} \cdot \vec{OM}} \underbrace{\left(\sum_k e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{R}_k} \right)}_{\text{Facteur de structure}} \underbrace{\int_{\Sigma} t_0(P) e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{P}_k\vec{P}} d\Sigma}_{\text{Facteur de forme}}$$

Applications en cristallographie.

1. Cas d'une répartition aléatoire. On a

$$I \propto |s(M)|^2 = |s'_0|^2 \left| \sum_k e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{R}_k} \right|^2 \underbrace{\left| \int_{\Sigma} t_0(P) e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{P}_k\vec{P}} d\Sigma \right|^2}_{=i(P) \text{ diffraction d'un seul motif}}.$$

Soit $A = \left| \sum_k e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{R}_k} \right|^2$ le facteur de structure. On a

$$\begin{aligned} A &= \left| \sum_k e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{R}_k} \right|^2, \\ &= \sum_{k,m} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot (\vec{R}_k - \vec{R}_m)}, \\ &= \sum_{k=m} 1 + \sum_{k \neq m} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot (\vec{R}_k - \vec{R}_m)}, \\ &= N + \underbrace{\sum_{k \neq m} e^{i\Delta\vec{k} \cdot (\vec{R}_k - \vec{R}_m)}}_{\approx 0 \text{ si } N \text{ grand}}. \end{aligned}$$

Donc

$$I(P) = Ni(P).$$

Si on a N motifs répartis aléatoirement, on obtient N fois en intensité le profil d'un motif unique.

Applications : mesure du diamètre de poudres,...

2. Structures périodiques : réseau.

Si les motifs sont répartis de manière ordonnée, une relation de phase déterminée est établie entre chacun d'eux et le deuxième terme de la somme précédent est non nul.

On envisage le cas simple du réseau plan. On considère une onde plane incidente de vecteur d'onde \vec{k}_0 , et on observe l'onde diffractée en \vec{k} . On cherche la

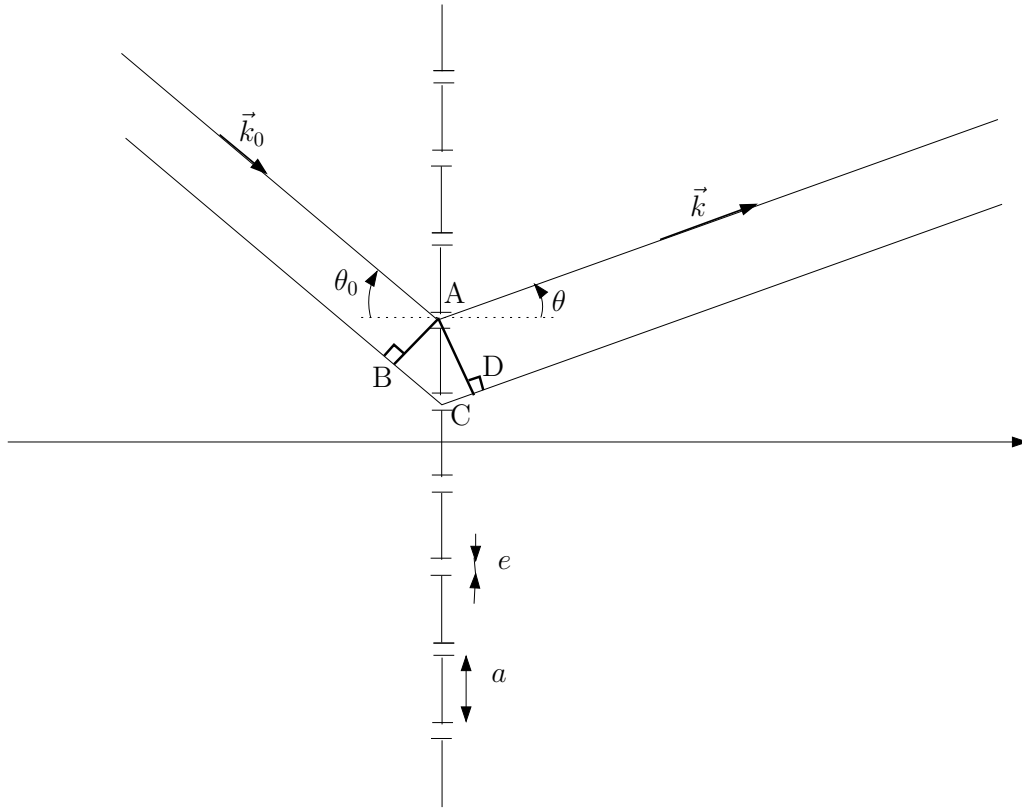


Figure 7: Diffraction par un réseau plan.

différence de marche entre deux éléments successifs. Selon les notations de la figure, on a

$$\delta = BC + CD = -a \sin \theta_0 + a \sin \theta,$$

car $\theta_0 < 0$ dans le cas de figure considéré. Interférences entre les ondes diffractées par les N traits : elles seront constructives si

$$n\lambda = \delta,$$

la formule dite des réseaux

$$\sin \theta_n = \sin \theta_0 + n \frac{\lambda}{a}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Le motif élémentaire est une fente, le facteur de forme sera donc un sinus cardinal

$$i(P) = i_0 \text{sinc}^2 \left(\pi \frac{e}{\lambda} \theta \right).$$

Facteur de structure : on pose $\Delta \vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$.

$$A = \sum_m \sum_l e^{-i \Delta \vec{k} \cdot (m-l) \vec{a}},$$

d'après la formule précédente, car $\vec{R}_m = m \vec{a}$.

Deuxième méthode : on fait le raisonnement classique avec $\varphi = 2\pi \frac{a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0)$ et $s = s_0 \sum e^{in\varphi}$. Alors $I = I_0 \left| \sum e^{in\varphi} \right|^2$. Donc

$$\begin{aligned} A &= \sum_m \sum_l e^{i(\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{2\pi}{\lambda} (m-l)a}, \\ &= \left| \sum_m e^{i(\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{2\pi}{\lambda} ma} \right|^2. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N e^{i(\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{2\pi}{\lambda} am} &= \frac{1 - e^{i\varphi N}}{1 - e^{i\varphi}} e^{i\varphi}, \\ &= e^{i\frac{\varphi(N+1)}{2}} \frac{\sin \left(\frac{\varphi N}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Donc

$$A = N^2 \underbrace{\left(\frac{\sin \left(\frac{\varphi N}{2} \right)}{N \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \right)^2}_{\max=1}.$$

Donc

$$I_{\max} \propto N^2,$$

et non N contrairement au cas d'une répartition aléatoire. D'où l'expression complète

$$I = N^2 I_0 \underbrace{\text{sinc}^2 \left(k_0 (\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{e}{2} \right)}_{=0 \text{ quand } \varphi \frac{e}{2a} = p\pi} \left(\frac{\sin \left(\frac{\varphi N}{2} \right)}{N \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \right)^2$$

Le facteur de forme s'annule quand $\varphi \frac{e}{2a} = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$ soit $\varphi = 2p\pi \frac{a}{e}$.
Toutes les longueurs caractéristiques du réseau apparaissent sur la figure.

Pouvoir dispersif.

$$\left| \frac{d\theta}{d\lambda} \right| \text{ tel que } \left| \frac{d\varphi}{d\lambda} \right| \text{ soit maximal.}$$

Si on se place dans l'ordre m : $\left| \frac{d\theta}{d\lambda} \right|_m = ?$. On a

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) a = 2m\pi,$$

or $d\varphi = 0$ sur un pic, donc en différenciant l'expression précédente, on obtient

$$ad\theta \cos \theta = md\lambda,$$

d'où

$$\left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)_m = \frac{m}{a \cos \theta}.$$

On remarque en particulier qu'il n'y a pas de dispersion dans l'ordre 0.

Si on considère des petits angles, en pratique, $\theta \approx 0$, donc

$$\left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)_m \approx \frac{m}{a}.$$

Le pouvoir dispersif est d'autant plus important que l'ordre est important et que a est faible.

Pour la spectroscopie, il faut faire un compromis entre l'ordre, le pouvoir de dispersion et l'intensité.

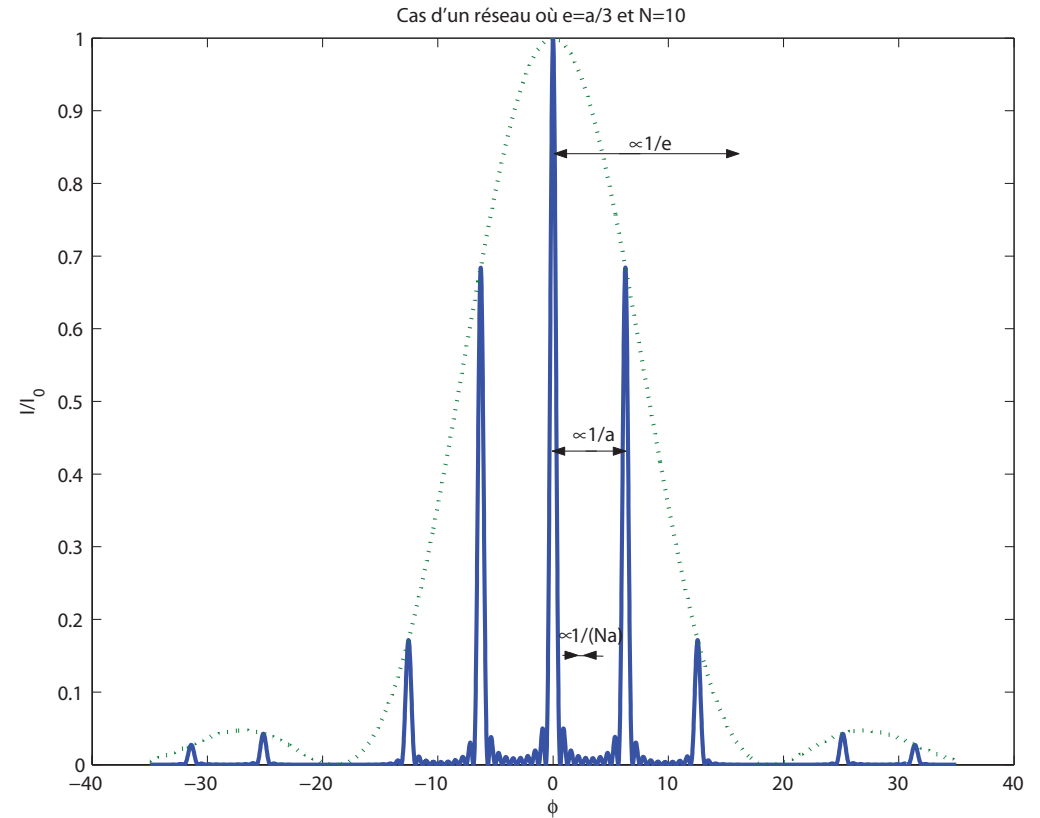


Figure 8: Diffraction par un réseau plan, dans le cas où $e = \frac{1}{3}a$ et $N = 10$.

Pouvoir de résolution. Soit $\delta\varphi$ entre deux pics qu'on arrive à résoudre. On définit le pouvoir de résolution PR selon

$$PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

On considère que l'on est à la limite de résoudre deux pic quand le maximum de l'un coïncide avec la première annulation de l'autre. On note $\delta\varphi$ la différence de phase correspondante. Au voisinage d'un pic, par 2π -périodicité de la fonction

sinus, on peut se ramener au voisinage de $\varphi \sim 0$ et considérer que $\delta\varphi \ll 1$. Alors

$$\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \approx \text{sinc}\left(\frac{N\varphi}{2}\right),$$

car $\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$. Donc

$$I \approx I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right),$$

centré en $\varphi = 0$.

Première annulation de I en $\delta\varphi$ par définition de $\delta\varphi$, soit $\frac{N\delta\varphi}{2} = \pi$. Or $\varphi = 2\pi\frac{a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$. Si on passe de λ à $\lambda + \delta\lambda$, on a une variation de phase correspondante

$$\varphi' = \varphi + \delta\varphi = 2\pi(\sin\theta - \sin\theta_0) \frac{a}{\lambda} \frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}},$$

Si $\delta\lambda \ll \lambda \implies \delta\varphi = \varphi \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$. Donc

$$\begin{cases} \frac{N\Delta\lambda}{2\lambda} \varphi = \pi, \\ \varphi = 2m\pi, \end{cases} \quad \text{d'où } mN \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1.$$

soit

$$\text{PR} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN.$$

Le pouvoir de résolution d'un réseau est d'autant plus important que l'ordre est important, et que le nombre de figures diffractantes éclairées est important. On voit donc émerger les 3 dimensions caractéristiques du réseau

	Espace réel	Espace réciproque
$L = Na$	dimension la plus grande	dimension la plus petite petites annulations de la fonction des réseaux BF spatiales
a	dimension intermédiaire distance entre les fentes	directions de sélection ordres du réseau HF spatiales
e	plus petite dimension taille d'une fente	modulation globale THF spatiales

This work is licensed under a Creative Commons "Attribution-NonCommercial-NoD



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>