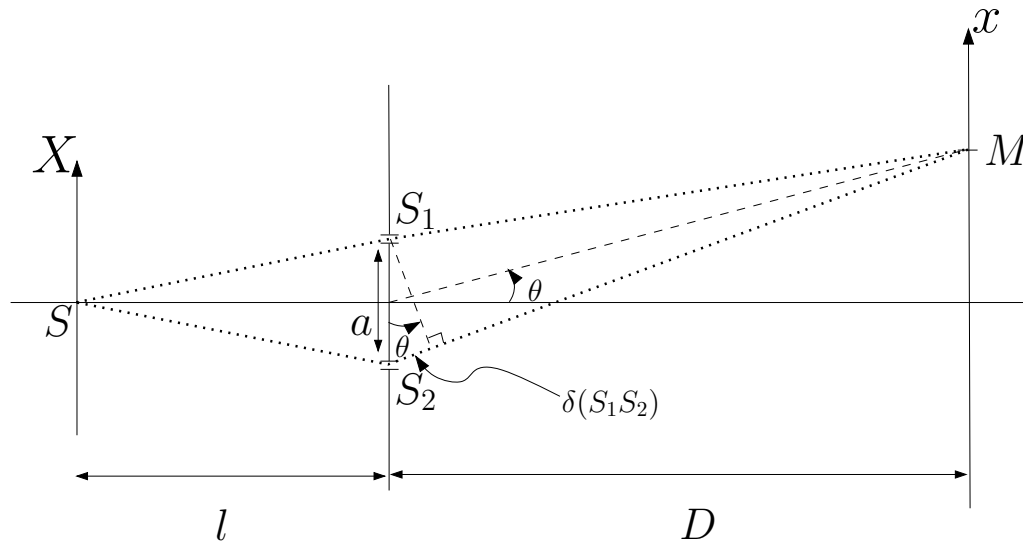


Corrigé

Interférences – Notion de cohérence

I. NOTION DE COHÉRENCE TEMPORELLE



1.

Les deux fentes S_1 et S_2 sont des sources secondaires, issues de la source S , et sont donc avec une relation de phase parfaitement déterminée. De plus, S_1 et S_2 sont symétriques par rapport à S , donc le déphasage entre S_1 et S_2 est nul. On note s_i la vibration issue de la source S_i .

Rappel : approximations usuelles

- approximation scalaire : on néglige le caractère vectoriel de l'onde lumineuse (Cf. TP polarisation),
- $d, D \gg a \gg \lambda$.

Les deux fentes sont identiques, donc $s_1(S_1) = s_0 = s_2(S_2)$, avec $s(M)_i = s_0 e^{ik\delta_i(M)}$. En M , les deux ondes se superposent selon

$$s(M) = s_1(M) + s_2(M) = s_0 \left(e^{ik\delta_1} + e^{ik\delta_2} \right).$$

Première méthode : $\delta_1 = S_1M$, $\delta_2 = S_2M$ et $k = 2\pi/\lambda$. On a

$$S_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + y^2},$$

$$S_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + y^2}.$$

Ensuite, en faisant un développement limité par rapport à x/D , y/D et a/D , on obtient

$$S_1M - S_2M = -\frac{a}{D}x.$$

D'où

$$s = s_0 e^{ik_0\delta_1} \left(1 + e^{ik_0(S_2M - S_1M)} \right).$$

Or $I \propto |s|^2$, d'où le résultat, en notant $I_0 = |s_0|^2$

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right).$$

On a un interfrange $i = \lambda D/a$.

Deuxième méthode : Géométriquement, $\theta = x/D$ et donc $\delta = a\theta = ax/D$. Pour avoir des interférences constructives, on doit avoir

$$\delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 2\pi p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

D'où

$$\delta = \lambda p \rightarrow x = \underbrace{\frac{\lambda D}{a}}_{=i} p.$$

Pour avoir des interférences destructives, on doit avoir

$$\delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 2\pi p + \pi, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Remarque : cas de deux trous sources, interférences constructives pour $S_1M - S_2M = p\lambda$. C'est l'équation d'hyperboloïdes de révolution de foyers S_1 et S_2 .

2. On a, pour une fréquence ν , $\lambda = \frac{c}{\nu}$, alors la figure d'interférence pour une source monochromatique prend la forme

$$I = I_0 \cos^2 \left(\pi \frac{a}{cD} \nu x \right) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{a}{cD} \nu x \right) \right).$$

Si on a deux composantes spectrales de fréquences ν_1 et ν_2 , associés aux longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 , **les deux longueurs d'onde sont incohérentes entre elles.**

DÉMONSTRATION :

Soit s la superposition en \vec{x} de deux vibrations de pulsation ω_1 et ω_2

$$s = s_0 e^{-i\omega_1 t + i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + s'_0 e^{-i\omega_2 t + i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}},$$

alors

$$I(\vec{x}) \propto |s|^2 = |s_0|^2 + |s'_0|^2 + 2\text{Re} \left(s_0 s_0'^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t + i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x}} \right).$$

Hypothèse simplificatrice sans perte de généralité : $s_0, s'_0 \in \mathbb{R}^2$, alors

$$|s|^2 = |s_0|^2 + |s'_0|^2 + 2s_0 s'_0 \underbrace{\cos \left((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x} \right) - (\omega_1 - \omega_2)t}_{\text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow \text{oscille à des fréquences optiques}}.$$

Le terme oscillant est nul en valeur moyenne car pour T_{optique} période temporelle de l'onde et $T_{\text{détecteur}}$ temps de réponse du détecteur

$$T_{\text{optique}} \lll T_{\text{détecteur}}.$$

Deux vibrations lumineuses de fréquences différentes n'interfèrent pas entre elles.

Donc, dans le cas de deux fréquences ν_1 et ν_2

$$I = I_0 \left(2 + \underbrace{\cos \left(2\pi \frac{a}{cD} \nu_1 x \right) + \cos \left(2\pi \frac{a}{cD} \nu_2 x \right)}_{2 \cos \left(2\pi \frac{a}{cD} \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} x \right) \cos \left(2\pi \frac{a}{cD} \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} x \right)} \right).$$

On pose $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ et $\bar{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$, alors

$$I = 2I_0 \left(1 + \underbrace{\cos \left(\pi \frac{a}{cD} \Delta\nu x \right)}_{\text{contraste } C} \underbrace{\cos \left(2\pi \frac{a}{cD} \bar{\nu} x \right)}_{\text{interférences à } \bar{\nu}} \right).$$

On a une modulation périodique du contraste selon

$$C = \cos \left(\pi \frac{a}{cD} \Delta\nu x \right).$$

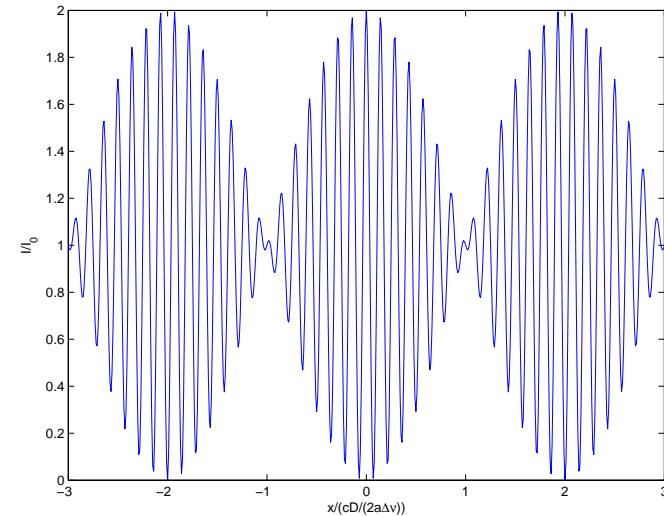


Figure 1: Figure d'interférence observée pour deux composantes spectrales.

3.

On décompose la source en composantes spectrales élémentaires. Si on considère les fréquences entre ν et $\nu + d\nu$, on a une intensité élémentaire $\mathcal{I}(\nu)d\nu$ qui donne une figure d'interférence

$$dI(\nu) = \mathcal{I}(\nu) \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{a}{cD} \nu x \right) \right) d\nu.$$

Chaque composante spectrales élémentaires sont incohérentes entre elles

$$I = \int dI = \underbrace{\int \mathcal{I}(v) dv}_{=I_0} + \underbrace{\int \mathcal{I}(v) \cos\left(2\pi \frac{a}{cD} vx\right) dv}_{\text{Re}\left(\int \mathcal{I}(v) e^{2i\pi \frac{a}{cD} vx} dv\right)}$$

Or $\mathcal{I}(v)$ ne prend des valeurs notables que pour $v \sim v_0$ à la largeur de raie près, donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathcal{I}(v) e^{2i\pi \frac{a}{cD} vx} dv &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(v) e^{2i\pi \frac{a}{cD} vx} dv, \\ &= e^{2i\pi \frac{a}{cD} v_0 x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(v + v_0) e^{2i\pi \frac{a}{cD} vx} dv \right). \end{aligned}$$

$\mathcal{I}(v + v_0)$ est la densité spectrale mais **centrée en 0**, donc ne contient plus d'information sur la fréquence centrale, cependant conserve l'information sur le profil de raie. On obtient alors

$$I = I_0 \left(1 + \text{Re} \left(\underbrace{e^{2i\pi \frac{a}{cD} v_0 x}}_{\text{interférences à } v_0} \underbrace{\left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(v + v_0) e^{2i\pi \frac{a}{cD} vx} dv}{I_0} \right)}_{\text{contraste } c} \right) \right)$$

On a un contraste \mathcal{C}

$$\mathcal{C} = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(v + v_0) e^{2i\pi \frac{a}{cD} vx} dv}{I_0} \right),$$

en introduisant

$$\hat{\mathcal{I}}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(v + v_0) e^{2i\pi uv} dv,$$

la transformée de Fourier du profil de raie, alors

$$\mathcal{C} = \frac{\hat{\mathcal{I}}\left(\frac{ax}{cD}\right)}{\hat{\mathcal{I}}(0)}.$$

Dans le cas d'une lorentzienne

$$\mathcal{I}(v + v_0) = I_0 \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + v^2},$$

on trouve dans les tables

$$\hat{\mathcal{I}}(u) = I_0 \frac{\pi}{2} \Gamma e^{-\pi \Gamma |u|},$$

d'où le contraste

$$\mathcal{C} = e^{-\pi \Gamma \frac{ax}{cD}}.$$

On a donc la longueur de cohérence

$$l_c = \frac{cD}{\pi \Gamma a}.$$

La longueur de cohérence est d'autant plus faible que la raie est large (relation de transformée de Fourier).

On peut considérer un cas simplifié en approximant la raie par une fonction porte Π entre $v_0 - \Delta v/2$ et $v_0 + \Delta v/2$

$$\mathcal{I}(v) \approx \frac{I_0}{\Delta v} \Pi\left(v_0 - \frac{\Delta v}{2}; v_0 + \frac{\Delta v}{2}\right),$$

où $\Pi(a; b)$ est la fonction porte entre a et b . Alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \mathcal{I}(v) dv + \int_0^{+\infty} \mathcal{I}(v) \cos\left(2\pi \frac{av}{cD} x\right) dv, \\ &= I_0 + \frac{I_0}{\Delta v} \int_{v_0 - \frac{\Delta v}{2}}^{v_0 + \frac{\Delta v}{2}} \cos\left(2\pi \frac{av}{cD} x\right) dv, \\ &= I_0 \left(1 + \frac{1}{\Delta v} \frac{cD}{2\pi ax} \underbrace{\left(\sin\left(2\pi \frac{ax}{cD} \left(v_0 + \frac{\Delta v}{2}\right)\right) - \sin\left(2\pi \frac{ax}{cD} \left(v_0 - \frac{\Delta v}{2}\right)\right) \right)}_{2 \sin\left(\pi \frac{ax}{cD} \Delta v\right) \cos\left(2\pi \frac{ax}{cD} v_0\right)} \right) \end{aligned}$$

Soit

$$I = I_0 \left(1 + \text{sinc}\left(\pi \frac{ax}{cD} \Delta v\right) \cos\left(2\pi \frac{ax}{cD} v_0\right) \right).$$

Soit un contraste $\mathcal{C} = \text{sinc}\left(\pi \frac{ax}{cD} \Delta v\right)$.

Notion de cohérence temporelle : on a un brouillage des interférences entre les différentes composantes spectrales. Chaque composante spectrale a sa propre figure d'interférence. Le déphasage dépend de λ selon $\delta\varphi = \frac{\delta}{\lambda} 2\pi$. Si la différence de marche est faible, les différences de phases relatives entre longueur

d'ondes sont faibles : on voit des interférences. Si δ est grand, une petite différence de longueur d'onde peut se traduire par un grand déphasage... il y aura brouillage des franges. Cela introduit naturellement la notion de longueur de cohérence.

Longueur de cohérence : on aura le premier brouillage pour $x \approx \frac{cD}{a\Delta\nu}$, soit une différence de marche correspondante $\delta_0 = \frac{a}{D}x = \frac{c}{\Delta\nu}$. Longueur caractéristique sur laquelle on voit des franges l_c

$$l_c = \frac{c}{\Delta\nu} \text{ longueur de cohérence.}$$

On y associe un temps caractéristique $\tau_c = \frac{l_c}{c} = \frac{1}{\Delta\nu}$, soit

$$\tau_c \cdot \Delta\nu = 1.$$

τ_c est le temps entre deux trains d'ondes où l'on perd la relation de phase entre les deux ondes... τ_c est le temps de cohérence. Ordres de grandeurs

lumière blanche $l_c \lesssim 1 \mu\text{m}$,

lampe spectrale $l_c \approx \text{qq mm}$, $\Delta\nu \approx 1 \text{ GHz}$,

laser $l_c \sim 1 \text{ m}$ à plusieurs km.

On a donc **3 temps caractéristiques en optique** qui en général vérifient la hiérarchie suivante :

$$T_{\text{optique}} \ll T_{\text{cohérence}} \ll T_{\text{détecteur}}.$$

II. NOTION DE COHÉRENCE SPATIALE

1. On note $\delta(M_1M_2)$ la différence de marche entre les points M_1 et M_2 . Considérons un point P appartenant à la fente source, de côte X . On a une première différence de marche pour les vibrations lumineuses issues de P en S_1 et S_2 selon

$$\delta(S_2S_1) \approx a \frac{X}{l},$$

ensuite, un deuxième déphasage apparaît lors de la propagation de S_1 (resp. S_2) vers M selon

$$\delta(MS_2) - \delta(MS_1) \approx a \frac{x}{D}.$$

Au final, on obtient en M l'addition de deux ondes (une passant par S_1 et l'autre par S_2) avec un déphasage

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \left(\frac{X}{l} + \frac{x}{D} \right).$$

On aura donc une vibration lumineuse s

$$s(x) = s_0 + s_0 e^{i\delta\varphi},$$

donc une amplitude $I(x) = s \cdot s^*$ soit, en notant $I_0 = s_0 \cdot s_0^*$

$$I(x) = I_0 (1 + \cos \delta\varphi(x)).$$

Soit $\mathcal{I}(X)$ la densité spatiale d'intensité de la source. Comme la source est une fente homogène, on a donc

$$\mathcal{I}(X) = \frac{I_0}{b} \Pi(X, b),$$

où $\Pi(X, b)$ est la fonction porte centrée en 0, de largeur b .

Si on considère une fine fente source de largeur dX à la côte X , on a un éclairage élémentaire $dI(x)$ dans le plan d'observation donné par

$$dI(x) = \frac{I_0}{b} \Pi(X, b) \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{D} \left(x + X \frac{D}{l} \right) \right] \right) dX,$$

et comme la source est spatialement incohérente, on somme les **intensités** pour avoir l'éclairage total selon

$$I(x) = \frac{I_0}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{D} \left(x + X \frac{D}{l} \right) \right] \right) dX,$$

qui se calcul de façon élémentaire pour donner

$$I(x) = I_0 \left(1 + \frac{\sin u}{u} \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right) \text{ avec } u = \pi \frac{ab}{\lambda l}.$$

Remarque : **Notion de longueur de cohérence spatiale**

Le premier brouillage de la figure d'interférence a lieu pour une valeur de la largeur de la fente source

$$b_0 = \frac{\lambda l}{a}.$$

On peut interpréter cela en considérant deux sources ponctuels S et S' telles que les deux figures d'interférences correspondantes soient décalées de $\frac{i}{2}$, où i est l'interfrange. On obtient alors un éclaircissement uniforme. L'image géométrique d'un point de côte X est en $-X\frac{D}{l}$, la condition de brouillage des franges devient alors, pour S en $b/2$ et S' en $-b/2$.

$$\frac{b_0 D}{2 l} = \frac{i}{2} = \frac{\lambda D}{2a} \quad \text{soit} \quad b_0 = \frac{\lambda d}{a}.$$

On remarque par ailleurs que **le contraste ne dépend pas de la position de l'écran d'observation, mais uniquement de la distance entre la source et la bifente**. On peut donc considérer que ce dispositif évalue la cohérence spatiale de la vibration lumineuse au niveau des deux points S_1 et S_2 .

Le calcul précédent nous montre que les franges derrière l'écran resteront bien contrastées tant que $b < b_0$ soit

$$\frac{ab}{\lambda l} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a < \frac{\lambda}{b} l,$$

ce qui fait apparaître un angle caractéristique associé à la fente de largeur b

$$\theta_c = \frac{\lambda}{b}.$$

Si la bifente est située à l'intérieur d'une zone de rayonnement cohérent délimité par l'angle θ_c , elle sera cohérente spatialement. C'est pour cela que les étoiles peuvent, malgré leur tailles, être approximées par des sources ponctuelles spatialement cohérentes (ex : mesure interférométrique de la distance angulaire d'une étoile double, exercice classique).

2.

Pour un laser, chaque point de la source est en relation de phase avec les autres (un seul mode du champ électromagnétique) et donc le raisonnement précédent n'est plus valable : un laser est spatialement cohérent.

3.

On a $\delta(S_1 S_2) = \delta(OS_1) - \delta(OS_2) \approx a\frac{x}{l}$ dans l'approximation où l est grand devant a ainsi que devant les dimensions caractéristiques de la source. De plus, de manière classique, $\delta(S_1 M) - \delta(S_2 M) \approx +a\frac{x}{D}$. Donc pour la tranche dX

d'intensité lumineuse $dI = \mathcal{I}(X)dX$ et donc contribue à une intensité lumineuse dans le plan d'observation

$$dI = \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{X}{l} + \frac{x}{D} \right) a \right) \right) \mathcal{I}(X)dX.$$

Les différentes tranches dX de la source sont incohérentes entre elles, on peut donc sommer les intensités, et donc obtenir l'intensité normalisée \tilde{I}

$$\tilde{I}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{X}{l} + \frac{x}{D} \right) a \right) \right) \mathcal{I}(X)dX}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(X)dX},$$

soit

$$\tilde{I}(x) - 1 = \operatorname{Re} \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2i\pi}{\lambda} \left(\frac{X}{l} + \frac{x}{D} \right) a} \mathcal{I}(X)dX}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(X)dX} \right).$$

On introduit

$$\hat{\mathcal{I}}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(X)e^{2i\pi Xu}dX,$$

la transformée de Fourier de $\mathcal{I}(X)$. Alors

$$\tilde{I}(x) - 1 = \operatorname{Re} \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2i\pi a}{\lambda l} \left(X + \frac{x l}{D} \right)} \mathcal{I}(X)dX}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(X)dX} \right) = \operatorname{Re} \left(\underbrace{e^{\frac{2i\pi a x}{\lambda D}}}_{\text{interférences}} \underbrace{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2i\pi a}{\lambda l} X} \mathcal{I}(X)dX}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(X)dX}}_{\text{contraste}} \right).$$

soit

$$\tilde{I}(x) - 1 = \operatorname{Re} \left(e^{\frac{2i\pi a x}{\lambda D}} \frac{\hat{\mathcal{I}}\left(\frac{a}{\lambda l}\right)}{\hat{\mathcal{I}}(0)} \right).$$

On obtient donc un contraste \mathcal{C} relié à la transformée de Fourier de la densité spectrale d'intensité de la source selon

$$\mathcal{C} = \operatorname{Re} \left(\frac{\hat{\mathcal{I}}\left(\frac{a}{\lambda l}\right)}{\hat{\mathcal{I}}(0)} \right).$$

Ce résultat constitue le théorème de VAN CITTERT – ZERNIKE. Il établit que le degré de cohérence spatial entre les deux points S_1 et S_2 et relié à la transformée de Fourier de la densité spatiale d'intensité.

Remarque 1 : On peut retrouver formellement la notion d'angle de cohérence *via* le théorème de Van Citter – Zernike.

Remarque 2 : Le théorème de Van Cittert – Zernike est en réalité plus complexe et plus puissant que la forme présentée ici, quantifiant le degré de cohérence entre deux points quelconques d'un système de sources secondaires. Néanmoins, cette forme est la plus courante et permet de nombreuses applications (mesure de la taille d'une étoile par exemple).

III. MODÈLE DES TRAINS D'ONDE ET COHÉRENCE TEMPORELLE

1. On peut modéliser une source de lumière comme une assemblée d'atomes qui se désexcitent en émettant un train d'onde. Cela correspond au processus de désexcitation d'un niveau d'énergie E_1 vers un niveau E_0 , et une onde lumineuse de fréquence ν_0 tel que $h\nu_0 = E_1 - E_0$. En pratique, cette émission se fait avec une certaine largeur spectrale. On considère donc des trains d'onde de durée finie τ . Soit $\hat{U}_0(\nu)$ le spectre fréquentiel du train d'onde.

$$\begin{aligned}\hat{U}_0(\nu) = \text{TF}(U(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(t)e^{-2i\pi\nu t} dt, \\ &= \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t} dt, \\ &= \frac{1}{2i\pi(\nu_0 - \nu)} 2i \sin\left(2\pi(\nu_0 - \nu)\frac{\tau}{2}\right).\end{aligned}$$

D'où,

$$\boxed{\hat{U}_0(\nu) = \tau \text{sinc}(\pi(\nu_0 - \nu)\tau)}.$$

Ce modèle simple permet qualitativement de reproduire une largeur de raie. Première annulation du sinus cardinal à $\nu_0 \pm \delta\nu/2$, avec $\delta\nu = 2/\tau$.

2.

On a

$$U(t) = \sum_i U_i(t),$$

avec

$$\begin{cases} U_i(t) = e^{2i\pi\nu_0 t}, & |t - t_i| < \tau/2, \\ U_i(t) = 0, & |t - t_i| > \tau/2. \end{cases}$$

correspondant à une succession de trains d'ondes, centrés en $\{t_i\}$. Alors, le spectre de cette ensemble de trains d'ondes est

$$\begin{aligned}\hat{U}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i U_i(t)e^{-2i\pi\nu t} dt, \\ &= \sum_i \int_{-\infty}^{+\infty} U_i(t)e^{-2i\pi\nu t} dt.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} U_i(t)e^{-2i\pi\nu t} dt &= \int_{t_i - \tau/2}^{t_i + \tau/2} e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t} dt, \\ &= e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t_i} \underbrace{\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t} dt}_{\hat{U}_0(\nu)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\hat{U}(\nu) = \left(\sum_i e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t_i} \right) \hat{U}_0(\nu).$$

Or,

$$I(\nu) \propto |\hat{U}(\nu)|^2 = \underbrace{\left| \sum_i e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t_i} \right|^2}_{=N \text{ car } \{t_i\} \text{ est aléatoire}} |\hat{U}_0(\nu)|^2,$$

soit

$$\boxed{I(\nu) = I_0 \text{sinc}^2(\pi(\nu - \nu_0)\tau)}.$$

3.

On retrouve bien une raie avec un largeur $\Delta\nu$ telle que

$$\Delta\nu \cdot \tau \sim 1.$$

Interprétation : on considère un interféromètre à division d'amplitude. On note $l_c = c\tau$ la longueur du train d'onde. Si δ la différence de marche est inférieure à l_c , alors il s'agit du même train d'onde initial qui interfère, avec une relation de phase parfaitement déterminée. Si $\delta > l_c$, alors il s'agira de deux trains d'onde différents qui vont se superposer, et donc sans relation de phase bien déterminée : ils n'interféreront pas. On peut interpréter l_c comme la longueur de cohérence de la source.

4.

On a $\Delta\nu = 1/\tau$, $\nu = c/\lambda$ donc $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu$.

- Lumière blanche : $\Delta\nu \sim 400 \text{ nm}$, $\tau \sim 10^{-15} \text{ s}$ et donc $l_c \sim 1 \mu\text{m}$.
- Raie spectrale : $\Delta\nu \sim 0.03 \text{ nm}$, $\tau \sim 10^{-11} \text{ s}$ et donc $l_c \sim 10 \text{ mm}$.
- Laser : $\Delta\nu$ est très variable suivant le laser, on retiendra que l_c est supérieur en général à plusieurs mètres.

IV. INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON (IMPORTANT)

1.

1.1.

Dans le cas d'une source ponctuelle, les deux lames font office de miroir. On obtient alors deux sources images S_1 et S_2 , ponctuelles, séparées de $2h$, cohérentes entre elles. Il s'agit donc d'un système équivalent à deux trous d'Young, on a donc des hyperboloïdes, et des interférences non localisées. Au point M considéré sur la figure, on observera donc des anneaux.

1.2.

Cas d'une source étendue : le déphasage entre les deux rayons dépend de l'angle d'incidence. On peut décomposer la source étendue en un ensemble de sources ponctuelles. Si on considère le cas extrême de deux sources ponctuelles, chacune de ces deux sources engendre son propre système d'hyperboloïdes d'interférences. Ces hyperboloïdes s'ajoutent les uns aux autres, et a priori ne se superposent pas et donc provoque un brouillage des franges. Il existe une exception : si le point d'observation est à l'infini. Alors, quelque soit le point

source considéré, l'angle d'incidence sur la lame des rayons interférant en M est le même pour toutes les sources individuelles et donc les figures d'interférences sont les mêmes et se superposent. L'utilisation d'une source étendue localise les franges à l'infini.

1.3.

On considère une lame d'épaisseur e , d'indice n .

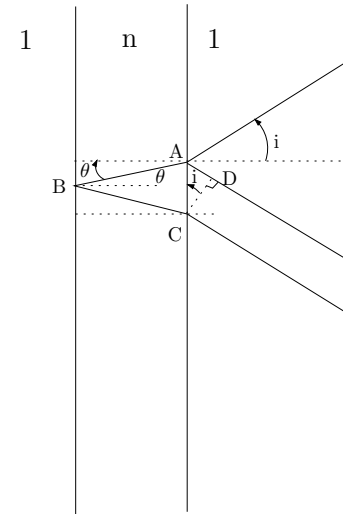


Figure 2: Différence de marche introduite par une lame d'épaisseur e .

La différence de marche vaut

$$\begin{aligned}\delta &= n(AB + BC) - AD \\ &= 2nAB - AD,\end{aligned}$$

or, d'après les lois de Descartes, $\sin i = n \sin \theta$ et géométriquement $AB = \frac{e}{\cos \theta}$, soit

$$\begin{aligned}AD &= AC \sin i, \\ &= ACn \sin \theta.\end{aligned}$$

Or

$$AC = 2AB \sin \theta,$$

soit

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{2en}{\cos \theta} - 2n \sin^2 \theta \left(\frac{e}{\cos \theta} \right), \\ &= \frac{2en}{\cos \theta} (1 - \sin^2 \theta).\end{aligned}$$

D'où le résultat

$$\boxed{\delta = 2ne \cos \theta}.$$

Dans le cas de l'air : $\theta = i$, $n = 1$ soit $\delta = 2ne \cos \theta$.

2. Si on considère l'image des miroirs à travers la séparatrice, un Michelson est équivalent à une lame d'air avec des coefficients de réflexion de 50%.

2.1.

2.1.a) $\delta = 2ne \cos \theta$

2.1.b) Dans le cas d'une source étendue, les anneaux sont localisés à l'infini (on utilise alors une lentille pour les visualiser).

2.1.c) Rayon des anneaux brillants. A l'infini, si on conjugue les anneaux avec une lentille de focale f , on a r rayon de l'anneau relié à i l'angle d'incidence selon $r = fi$ pour les petits angles. On aura des anneaux brillants lorsque les interférences sont constructives, donc pour une différence de marche $\delta = p\lambda_0$, $p \in \mathbb{Z}$. En utilisant l'expression de δ trouvée précédemment, on obtient

$$\cos i = \frac{p\lambda_0}{2e}$$

Si en recherche le contact optique, si e diminue, alors $\cos i$ augmente donc i diminue : les anneaux rentrent.

Approximation de Gauss, angle faible : $\cos i \approx 1 - i^2/2$. Si le centre est brillant, cela correspond à un ordre d'interférence p_0 tel que

$$\cos i = 1 = \frac{p_0\lambda_0}{2e},$$

donc $p_0 = \frac{2e}{\lambda_0}$. Pour $e \sim 10 \mu\text{m}$, on a $p_0 \sim 100$. Que vaut p pour les anneaux suivants ? On a i qui augmente donc $\cos i$ diminue et par conséquent p diminue.

Rayon du k^{e} anneau : $r_k = fi_{p_0-k}$, il correspond à l'ordre $p_0 - k$. Or

$$1 - \frac{i_{p_0-k}^2}{2} = \frac{p\lambda_0}{2e} = \frac{(p_0 - k)\lambda_0}{2e}.$$

D'où

$$\boxed{i_{p_0-k} = \sqrt{k \frac{\lambda_0}{e}}},$$

$$\boxed{r_{p_0-k} = f \sqrt{k \frac{\lambda_0}{e}}},$$

Attention, ces relations sont trompeuses quand à la dépendance de r avec l'épaisseur e , car l'ordre d'interférence intervient indirectement. Il faut toujours revenir à la relation $\cos i = \frac{p\lambda_0}{2e}$.

2.1.d) L'avantage d'un interféromètre de Michelson par rapport à un dispositif type trou d'Young, est qu'il permet d'utiliser des sources étendues et donc d'avoir des figures d'interférences plus lumineuses.

2.2.

2.2.a)

2.2.b) Les deux composantes spectrales sont incohérentes entre elles. On aura donc la superposition des deux systèmes d'anneaux, dont le rayon dépend de λ . On aura donc éventuellement un brouillage, suivant les valeurs de e .

2.2.c) D'un point de vue plus quantitatif

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) = I_1(1 + \cos \varphi_1) + I_2(1 + \cos \varphi_2).$$

Si on a des composantes spectrales de même intensité $I_1 = I_2 = I_0$ et

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \delta = \frac{4\pi e}{\lambda_1} \cos i,$$

soit

$$I(M) = I_0 \left(2 + \underbrace{\cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda_1} \cos i\right) + \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda_2} \cos i\right)}_{2 \cos\left(\frac{4\pi e}{2} \cos i \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \cos\left(\frac{4\pi e}{2} \cos i \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right)} \right)$$

et si $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \ll \lambda_1$,

$$\frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{1}{\lambda_1} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} \right),$$

d'où

$$I(M) = 2I_0 \left(\underbrace{1 + \cos\left(\frac{4\pi e \cos i}{\lambda_1}\right)}_{\text{interférences}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi e \cos i \Delta\lambda}{\lambda_1 \lambda_1}\right)}_{\text{contraste}} \right)$$

En pratique, on fixe $i = 0$ et on chariotte pour faire varier e . On peut mesurer λ_1 en mesurant la période rapide et $\Delta\lambda$ en mesurant la période lente (Cf. TP Spectrométrie).

2.2.d) Au centre, $\cos i \sim 1$, on aura annulation du contraste pour

$$\frac{2\pi e \Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. Entre deux annulations, on a chariotte de δe tel que

$$\frac{2\pi \delta e \Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \pi,$$

soit

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_1^2}{2\delta e}.$$

Les oscillations rapides de période Δe sont telles que $\frac{4\pi \Delta e}{\lambda_1} = 2\pi$ soit

$$\lambda_1 = 2\Delta e.$$

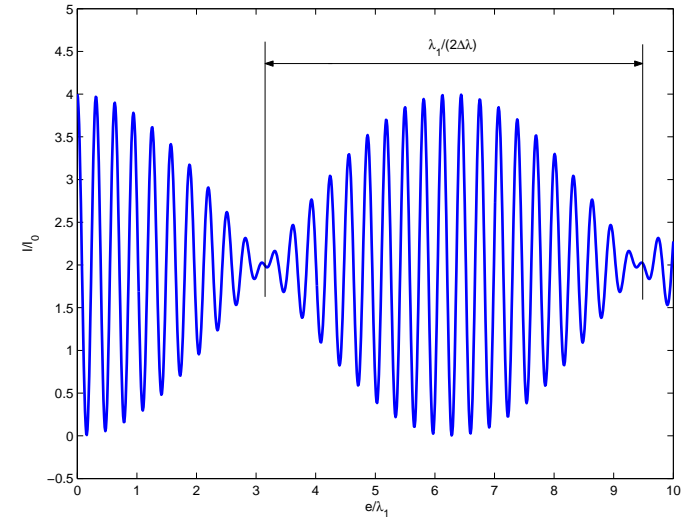


Figure 3: Allure de l'interférogramme dans le cas du doublet du Sodium.

3.

On aura des **franges localisées** sur le coin d'air. La différence de marche est proportionnelle à l'épaisseur. Dans le cas de la lumière blanche, on a un déphasage de π à la séparatrice, donc si $e = 0$, $\delta = 0$ mais $\varphi = \pi$, on aura donc une frange achromatique noir. Puis la période dépend de e mais aussi de λ . On observe donc des irisations, puis du blanc d'ordre supérieur. (Cf. Sextant). On voit les irisations car l'œil est un instrument d'optique sélectif en longueur d'onde. Le blanc d'ordre supérieur correspondant à un spectre cannelé. Pour une épaisseur donnée, on peut étudier la variation de l'intensité en fonction de la longueur d'onde. On a $\delta \propto \frac{e}{\lambda}$ donc une intensité en $\cos\left(\alpha \frac{e}{\lambda}\right)$. Si e est faible, on aura une période lente en fonction de λ et donc une teinte colorée (dépendante de e). Par contre, si e est important, on a une oscillation rapide en λ et donc un spectre cannelé : c'est du blanc d'ordre supérieur.

V. INTERFÉROMÈTRE DE FABRY-PÉROT (IMPORTANT)

1.

1.1.

Le déphasage entre deux rayons successifs émergeant de la lame provient de la différence de marche δ avec

$$\delta = 2e \cos i,$$

par un calcul similaire à celui de l'exercice précédent. De plus, il faut rajouter un éventuel déphasage ψ inconnue lors de la réflexion sur les surfaces argentées formant les miroirs du Fabry-Pérot. Entre deux rayons consécutifs, on a donc un déphasage

$$\varphi = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda} + 2\psi.$$

Dans le cas de la lame d'air du Michelson, il s'agissait d'interférences à deux ondes, on ne tenait compte que des deux premiers rayons réfléchis, l'intensité des autres étant négligeable. Par contre, dans le cas du Fabry-Pérot, les coefficients de réflexion des miroirs sont très proche de 1. Par conséquent, l'intensité des rayons transmis est comparable, au-delà des deux premiers. Il y aura donc interférence entre l'ensemble des rayons réfléchi à travers la lame, on parle d'interférences d'ondes multiples.

Donc, si on considère la vibration lumineuse dans la direction i , elle est constituée de la somme des vibrations lumineuses issues de toutes les réflexions

$$s(i) = \underbrace{s_0 t^2}_{\text{onde 1}} + \underbrace{s_0 t r^2 e^{i\varphi} t}_{\text{onde 2}} + \underbrace{s_0 t (r^2 e^{i\varphi})^2 t}_{\text{onde 3}} + \dots$$

Le déphasage ne dépend que de l'angle d'incidence, on aura donc des anneaux. Pour les mêmes raisons que la lame d'air d'un Michelson, les franges sont localisées à l'infini. À chaque réflexion, l'amplitude de la vibration lumineuse est multipliée par un facteur $r^2 e^{i\varphi} t$, soit

$$\begin{aligned} s(i) &= s_0 t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (r^2 e^{i\varphi})^n, \\ &= \frac{t^2 s_0}{1 - r^2 e^{i\varphi}}. \end{aligned}$$

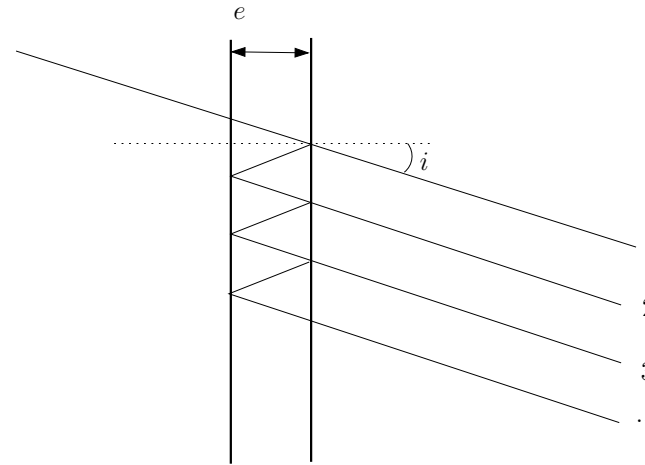


Figure 4: Interférences à ondes multiples dans le cas d'un Fabry-Pérot.

d'où $I = |s(i)|^2$

$$\begin{aligned} I(i) &= \frac{T^2 I_0}{|1 - R e^{i\varphi}|^2}, \\ &= \frac{T^2 I_0}{(1 - R e^{i\varphi})(1 - R e^{-i\varphi})}, \\ &= \frac{T^2 I_0}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}, \\ &= \frac{T^2 I_0}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos \varphi)}, \\ &= \frac{T^2 I_0}{(1 - R)^2 \left(1 + \frac{2R}{(1-R)^2} (2 \sin^2 \frac{\varphi}{2})\right)}. \end{aligned}$$

Or, dans un bon interféromètre, l'absorbion est négligeable, soit $T + R \approx 1$, d'où finalement

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

On aura un maximum d'intensité quand $\frac{\varphi}{2} = m\pi \Leftrightarrow \varphi = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$. Le

maximum vaut alors

$$I_{\max} = I_0.$$

On a un minimum d'intensité quand $\frac{\varphi}{2} = m\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi = (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}$.
Le minimum vaut alors

$$I_{\min} = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}}.$$

Le minimum sera d'autant plus faible que R sera proche de 1. Plus R sera grand, plus les pics seront fins et meilleur sera la résolution.

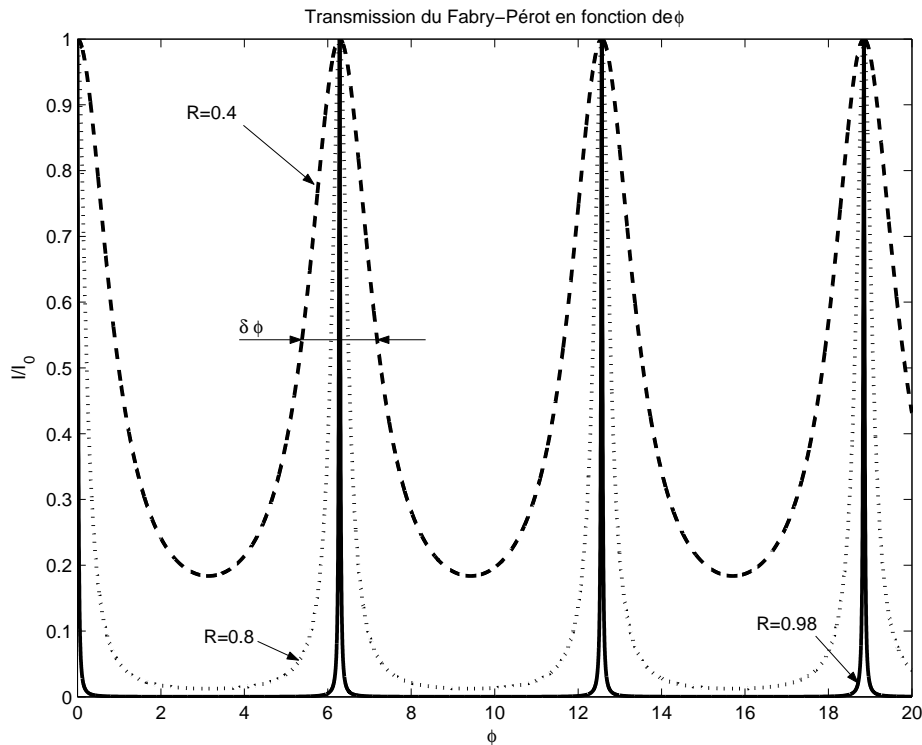


Figure 5: Transmission d'un Fabry-Pérot en fonction de φ . Influence du coefficient de réflexion.

Soit $\delta\varphi$ la largeur à mi-hauteur.

$$I = \frac{I_0}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2,$$

soit

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{(1-R)^2}{4R}.$$

On utilise ensuite le fait que I est une fonction périodique de φ , en se plaçant autour de $\varphi \approx 0$ (tout les pics ont la même largeur), et $\delta\varphi \ll 2\pi$. Alors

$$\frac{1-R}{2\sqrt{R}} = \sin \frac{\delta\varphi}{4} \approx \frac{\delta\varphi}{4},$$

d'où finalement

$$\boxed{\delta\varphi = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}}.$$

Si on néglige les pertes, on peut introduire $T = 1 - R$.

1.2. Par définition, on a

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}}.$$

1.3.

Si le centre est brillant, alors $\varphi(i=0) = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$, avec

$$\varphi = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda}.$$

Soit p l'ordre d'interférence d'un anneau, alors $\varphi(i=0) = 2p_0\pi = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda}$, donc

$$\cos i = \frac{\lambda}{2e} p.$$

Si i augmente, $\cos i$ diminue et donc p diminue aussi. Si on considère le k^{e} anneau, il correspondra donc à l'ordre $p_0 - k$, p_0 correspondant au centre. Soit i_k l'angle d'incidence correspondant à l'anneau k ,

$$\cos i_k = \frac{\lambda}{2e} (p_0 - k),$$

et si on considère les faibles angles, $\cos i_k \approx 1 - i_k^2/2$. D'où le résultat

$$i_k = \sqrt{\frac{\lambda k}{e}}$$

2.

2.1.

Si la source a deux composantes spectrales, on aura superposition des deux systèmes d'anneaux.

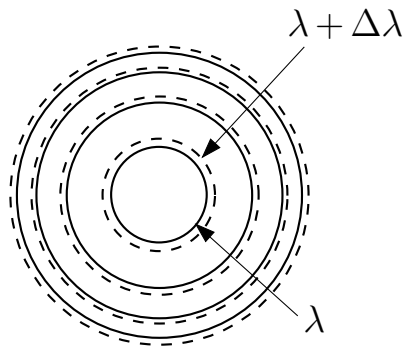


Figure 6: Anneaux à la sortie du Fabry-Pérot pour une source polychromatique (λ et $\lambda + \Delta\lambda$).

Si l'écart en longueur d'onde est faible, pour un ordre d'interférence p , les deux anneaux correspondant (un par longueur d'onde) seront proche l'un de l'autre, et on peut mesurer $\Delta\lambda$ sans ambiguïté. Si $\Delta\lambda$ augmente, l'écart entre anneaux de même ordre d'interférence augmente, jusqu'à ce que les ordres p de λ et $p + 1$ de $\lambda + \Delta\lambda$ se recouvrent. On ne peut plus résoudre $\Delta\lambda$ sans ambiguïté. L'intervalle spectral libre (ISL) correspond donc à l'écart $\Delta\lambda$ tel que les ordres p et $p + 1$ se recouvrent (valeur maximal de $\Delta\lambda$ que l'on peut résoudre). On cherche

donc $\Delta\lambda$ tel que

$$\begin{aligned} \cos i_{p+1}^\lambda &= \cos i_p^{\lambda+\Delta\lambda}, \\ \Leftrightarrow (p+1)\frac{\lambda}{2e} &= p\frac{\lambda+\Delta\lambda}{2e}, \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2e} &= p\frac{\lambda}{2e}. \end{aligned}$$

Donc

$$\Delta\lambda^{\text{ISL}} = \frac{\lambda}{p}$$

C'est l'écart maximal en longueur d'onde qu'on peut résoudre sans ambiguïté dans l'ordre p .

2.2.

L'écart minimal entre deux raie peut-être estimer comme l'écart tel que deux pics soient séparés de $\delta\varphi$, avec $\delta\varphi$ la largeur d'un pic. On se place sur le pic d'ordre p , donc $\frac{4\pi e \cos i}{\lambda} = 2p\pi$. On a $\delta\varphi = 2(1-R)/\sqrt{R}$. Si λ varie de $\delta\lambda$ dans l'ordre p . On aura une variation de phase $\delta\varphi$ correspondante, telle que

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \delta\left(\frac{4\pi e}{\lambda} \cos i\right), \\ &= \frac{\delta\lambda}{\lambda^2} 4\pi e \cos i, \\ &= \frac{\delta\lambda}{\lambda} \underbrace{\frac{4\pi e \cos i}{\lambda}}_{=2\pi p}. \end{aligned}$$

En l'identifiant à la largeur à mi-hauteur du pic,

$$\delta\varphi = 2\pi p \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} = \frac{2\pi}{\mathcal{F}}.$$

D'où

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{p\mathcal{F}}$$

On en déduit le pouvoir de résolution PR défini par $\text{PR} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = p\mathcal{F}$, ce dernier est d'autant plus important que la finesse est grande, et que l'on utilise un ordre

élevé. Pour pouvoir résoudre un doublet, il faudra donc respecter la hiérarchie suivante

$$\text{ISL} = \frac{\lambda}{p} \gg \underbrace{\Delta\lambda}_{\text{à résoudre}} \gg \delta\lambda = \frac{\lambda}{p\mathcal{F}}.$$

VI. AGREGATION 2005, ÉPREUVE A (PREMIÈRE PARTIE)

Cf. BUP et <http://www.agregation-physique.org>.

This work is licensed under a Creative Commons "Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International" license.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>