

# Propriétés des ondes

HA8402H – Physique et sciences de l'ingénieur 4

**Kenneth MAUSSANG**

Université de Montpellier

Polytech Montpellier – PeiP

2021 – 2022

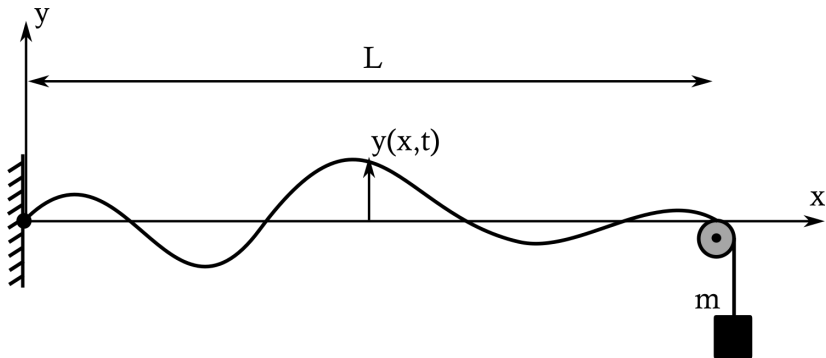
- O5.1 Établir une équation d'onde mécanique dans le cas d'une corde vibrante.
- O5.2 Étudier les propriétés générales des solutions de l'équation de D'Alembert (linéarité, interférences, ondes stationnaires).

- 1 Ondes sur une corde vibrante
- 2 Propriétés de l'équation de D'Alembert
- 3 Ondes sonores
- 4 Compléments

- 1 Ondes sur une corde vibrante
- 2 Propriétés de l'équation de D'Alembert
- 3 Ondes sonores
- 4 Compléments

# 1. Ondes sur une corde vibrante

Corde de longueur  $L$ , masse linéique  $\mu$ , soumise à une tension  $T$  (à l'aide d'une masse  $m$  via une poulie par exemple).



Soit  $y(x, t)$  la déformation de la corde en  $x$  à l'instant  $t$ .

# 1. Ondes sur une corde vibrante

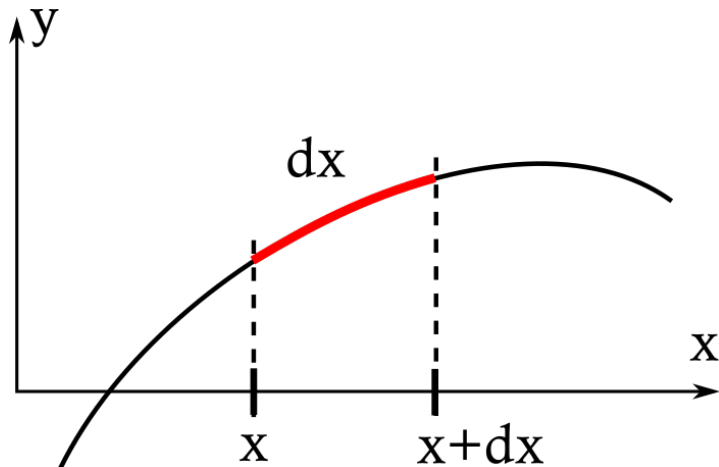
## Hypothèses du modèle :

- la corde est supposée être sans raideur, elle n'oppose aucune résistance à sa déformation et la tension est tangente en tout point de la corde, constante en norme ;
- on suppose la tension de la corde suffisamment importante pour pouvoir négliger l'influence de la pesanteur ;
- on suppose, sans perte de généralité, que les mouvements de la cordes ont lieu dans le plan  $xOy$  ;
- on néglige les phénomènes de dissipation ;
- on se place dans la limite des faibles déformations, telles que  $|\alpha(x, t)| \ll 1$ , où  $\alpha(x, t)$  est l'angle de la corde avec l'horizontale en  $x$  à l'instant  $t$ .

On considère un élément de corde  $dx$  en  $x$ .

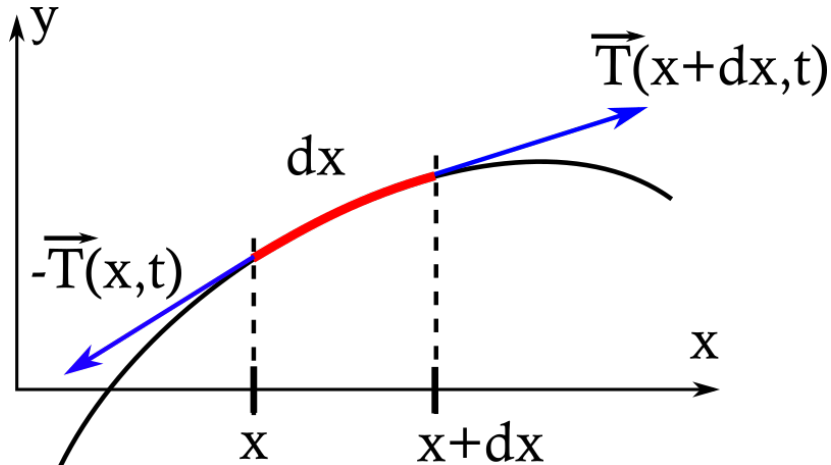
## 1.0. Ondes sur une corde vibrante

Bilan des forces et PDF au bout de corde.



## 1.0. Ondes sur une corde vibrante

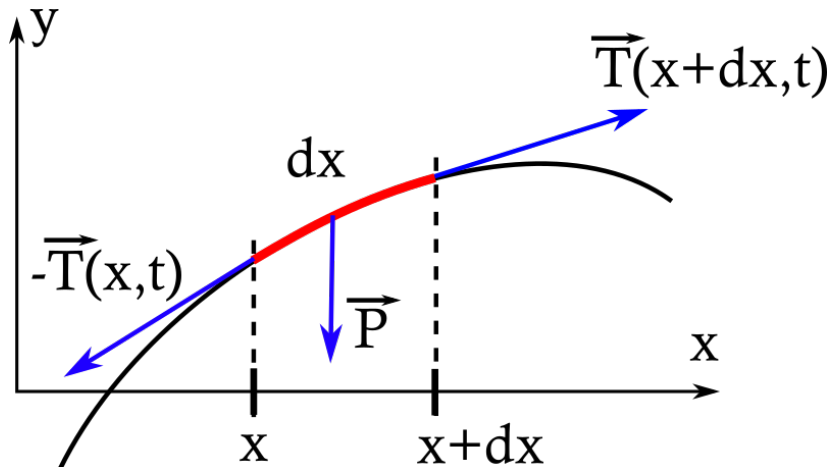
Bilan des forces et PDF au bout de corde.





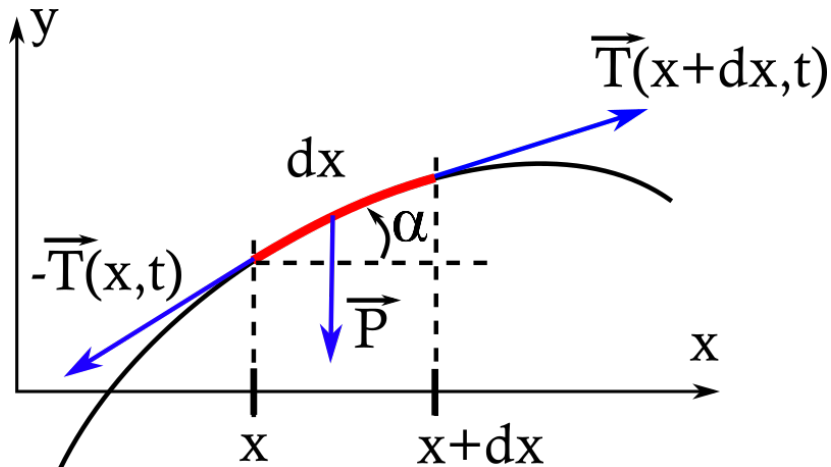
## 1.0. Ondes sur une corde vibrante

Bilan des forces et PDF au bout de corde.



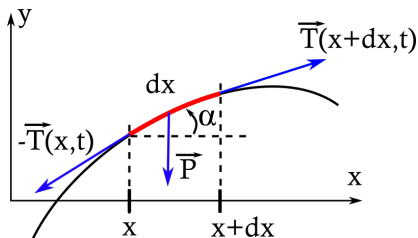
## 1.0. Ondes sur une corde vibrante

Bilan des forces et PDF au bout de corde.



## 1.0. Ondes sur une corde vibrante

### Bilan des forces et PDF au bout de corde.



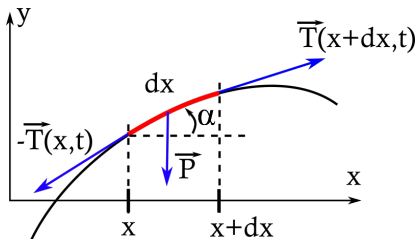
Projection du PFD sur  $\vec{u}_x$  puis sur  $\vec{u}_y$ .

On néglige le poids de l'élément de corde  $dx$  (tension  $\vec{T}$  très grande devant le poids).

On néglige la compression ou l'élongation selon l'axe  $x$ .

# 1.0. Ondes sur une corde vibrante

## Bilan des forces et PDF au bout de corde.



Projection du PFD sur l'axe  $x$

$$0 = (\vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)) \cdot \vec{u}_x,$$

soit

$$0 = T(x + dx, t) \cos \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t).$$

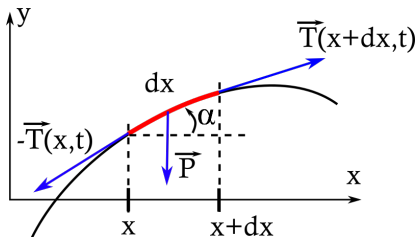
Petites déformations :  $\cos \alpha(x, t) \approx \cos \alpha(x + dx, t) \approx 1$ , d'où

$$\|\vec{T}(x + dx, t)\| \approx \|\vec{T}(x, t)\| = T.$$

La tension est constante le long de la corde.

# 1.0. Ondes sur une corde vibrante

## Bilan des forces et PDF au bout de corde.



$$\|\vec{T}(x + dx, t)\| = \|\vec{T}(x, t)\| = T,$$

$$\vec{T}(x, t) \cdot \vec{u}_y = T \sin \alpha(x, t),$$

$$\sin \alpha(x, t) \approx \alpha(x, t) \approx \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

$$(\vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)) \cdot \vec{u}_y = T (\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)) = T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx,$$

d'où

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

## 1.0. Ondes sur une corde vibrante

D'où l'équation d'onde vérifiée par la vibration  $y(x, t)$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}, \text{ avec } v \text{ la célérité de l'onde, } v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

- La vibration  $y(x, t)$  est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde : il s'agit d'une **onde transverse**.
- La grandeur ondulatoire est scalaire : il s'agit d'une **onde scalaire**.

Par opposition, une onde électromagnétique est une onde **transverse** et **vectorielle**.

## 1.0. Ondes sur une corde vibrante

**Cas de la corde de guitare :** l'onde se réfléchit sur la fixation de la corde. Comme pour le miroir parfait des ondes électromagnétiques, on a une **onde stationnaire**.

Aux points de fixation de la corde, l'amplitude  $y$  s'annule, donc la solution est de la forme

$$y(x, t) = A \sin(kz + \varphi) \sin(\omega t + \psi).$$

On impose deux conditions aux limites

$$y(x = 0, t) = 0 \quad \text{et} \quad y(x = L, t) = 0.$$

**Toutes les fréquences ne permettront pas de satisfaire ces deux conditions simultanément.**

## 1.0. Ondes sur une corde vibrante

$$y(x = 0, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0[\pi],$$

$$y(x = L, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

donc

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{d'où } \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*}.$$

On a un ensemble  $\{\lambda_n\}$  discret de **longueurs d'ondes admissibles**.  
Les pulsations correspondantes sont alors

$$\omega_n = k_n v = n \frac{\pi v}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\omega_n = n\omega_1} \quad \text{avec } \omega_1 = \frac{\pi v}{L}.$$

On appelle le mode  $n = 1$  le **mode fondamental**.



## **Corde de violon en slow-motion**

<https://www.youtube.com/watch?v=6JeyiM0YNo4>

- 1 Ondes sur une corde vibrante
- 2 Propriétés de l'équation de D'Alembert
  - Solution générale
  - Linéarité
  - Interférences et ondes stationnaires
- 3 Ondes sonores
- 4 Compléments

- 1 Ondes sur une corde vibrante
- 2 Propriétés de l'équation de D'Alembert
  - Solution générale
    - Linéarité
    - Interférences et ondes stationnaires
- 3 Ondes sonores
- 4 Compléments

## 2.1. Solution générale

Soit  $f(x, t)$  une fonction physiquement acceptable (mathématiquement continue, dérivable et bornée). On suppose que  $f(x, t)$  vérifie l'équation de D'Alembert

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Les solutions progressives font intervenir les variables naturelles  $\alpha = x - vt$  et  $\beta = x + vt$ . On obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

Donc la solution générale est de la forme

$$f(x, t) = g(x - vt) + h(x + vt).$$

La solution générale est la superposition d'une onde progressive vers la droite et d'une onde progressive vers la gauche.

- 1 Ondes sur une corde vibrante
- 2 Propriétés de l'équation de D'Alembert
  - Solution générale
  - **Linéarité**
  - Interférences et ondes stationnaires
- 3 Ondes sonores
- 4 Compléments

## 2.2. Linéarité

Si  $y_1$  et  $y_2$  sont des solutions de l'équation de D'Alembert, alors

$$y = y_1 + y_2,$$

est également une solution. Plus généralement,  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ ,

$$y' = \lambda y_1 + \mu y_2,$$

est également une solution.

**Interprétation** : les ondes se superposent, peuvent se croiser et continuer d'exister ensuite.

### Illustration de la linéarité de l'équation d'onde

`https://twitter.com/Rainmaker1973/status/  
970332335462932480`

- 1 Ondes sur une corde vibrante
- 2 Propriétés de l'équation de D'Alembert
  - Solution générale
  - Linéarité
  - Interférences et ondes stationnaires
- 3 Ondes sonores
- 4 Compléments



## 2.3. Interférences et ondes stationnaires

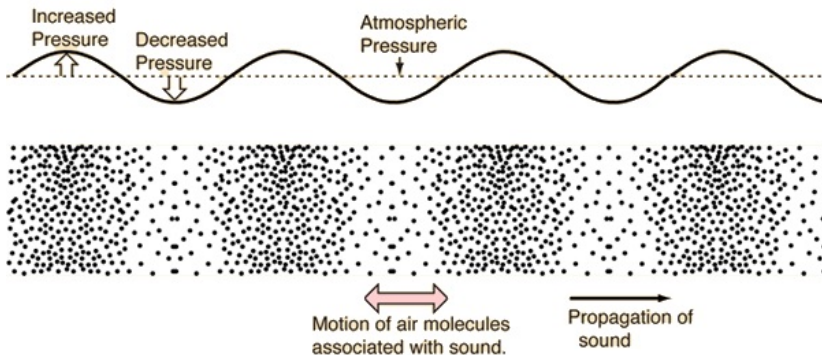
Les interférences sont le résultat d'une superposition d'ondes cohérentes : même fréquence et différence de phase constante. Elles donnent naissance à des noeuds et des ventres de vibration, comme dans le cas des ondes stationnaires que l'on a vu.

$$\underbrace{A \cos(\omega t - kz)}_{\text{---}\rightarrow} + \underbrace{A \cos(\omega t + kz)}_{\leftarrow\text{---}} = 2A \times \underbrace{\cos \omega t}_{\text{vibration}} \times \underbrace{\cos kz}_{\text{amplitude de vib.}}$$

- 1 Ondes sur une corde vibrante
- 2 Propriétés de l'équation de D'Alembert
- 3 Ondes sonores
- 4 Compléments

## 3.0. Ondes sonores

Une onde sonore est une onde de pression.



Une onde sonore se propage dans un milieu matériel : un gaz, un liquide, un solide. Une onde sonore ne se propage pas dans le vide. La grandeur physique qui se propage est une onde de surpression,  $p(x, t)$ , associée à un déplacement local  $\vec{u}(x, t)$ .

### 3.0. Ondes sonores

Coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_S$  et vitesse de l'écoulement  $\vec{v}(x, t)$

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S, \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}.$$

**On admet** que, pour un fluide, la vitesse de l'écoulement  $\vec{v}(x, t)$  et la surpression  $p(x, t)$  vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right., \quad (1)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique du fluide au repos.

## 3.0. Ondes sonores

En combinant ces deux équations

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

On retrouve bien l'équation de D'Alembert de célérité  $v$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}.$$

**Remarque :**

une onde acoustique est une onde **scalaire**, et **longitudinale**.

## 3.0. Ondes sonores

Dans le cas du gaz parfait, de rapport  $C_P/C_V = \gamma$ , et de masse molaire  $M_0$ , on obtient

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M_0}}.$$

Pour l'air, on a  $\gamma = 1,4$ ,  $R = 8.32 \text{ J}\cdot\text{mol}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $M_0 = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ .  
À 300K, on obtient

$$v_{\text{son}} = 347 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Vitesse du son pour différents gaz à  $T = 0^\circ\text{C}$

O <sub>2</sub>	air	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>
317 m/s	331 m/s	339 m/s	1270 m/s

## 3.0. Ondes sonores

Dans les liquides et solides, la vitesse du son est bien plus importante

eau	mercure	plomb	cuivre	fer	granit
1500 m/s	1450 m/s	1230 m/s	3750 m/s	5130 m/s	6000 m/s

### Fréquences et longueurs d'onde des ondes sonores

Oreille humaine : 20 Hz  $\rightarrow$  20 kHz. Au-delà de 20 kHz, on parle d'ultrasons. En dessous de 20 Hz, on parle d'infrasons.

Chien / chat : jusqu'à 60 kHz.

Dauphin / chauve-souris : jusqu'à 500 kHz.

Éléphant : infrasons.

### Les longueurs d'ondes

$$\lambda_{20\text{Hz}} = \frac{v}{f} = 100\text{m},$$

$$\lambda_{20\text{kHz}} = 10\text{cm}.$$



### L'intensité acoustique

Elle se mesure en  $\text{W}/\text{m}^2$  ou bien on mesure au sonomètre une pression en Pascal ( $\text{N}/\text{m}^2$ ). On utilise fréquemment les décibels (dB) définies comme suit

$$I_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right) = 20 \log_{10} \left( \frac{p}{p_0} \right),$$

avec

$$I_0 = 10^{-12} \text{W}/\text{m}^2 \text{ et } p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{Pa.}$$

L'oreille est un récepteur logarithmique avec une gamme dynamique allant de  $I_0$  à  $10^{13} I_0$ .

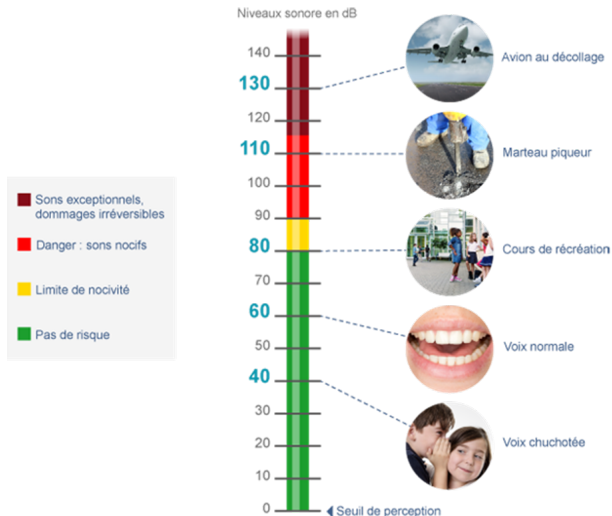
### Exemple de niveaux d'intensité acoustique

Dans une bibliothèque : 50 dB,

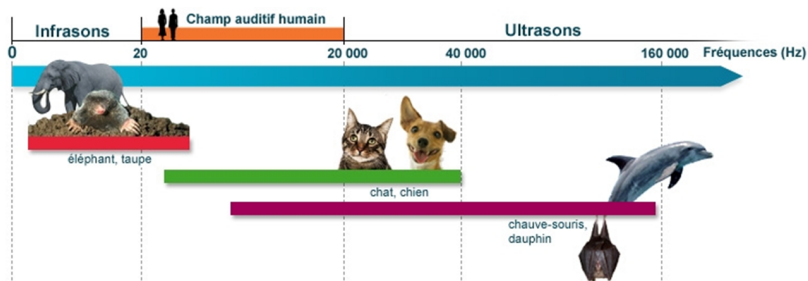
Un avion au décollage : environ 130 dB.

## 3.0. Ondes sonores

### Exemple de niveaux d'intensité acoustique

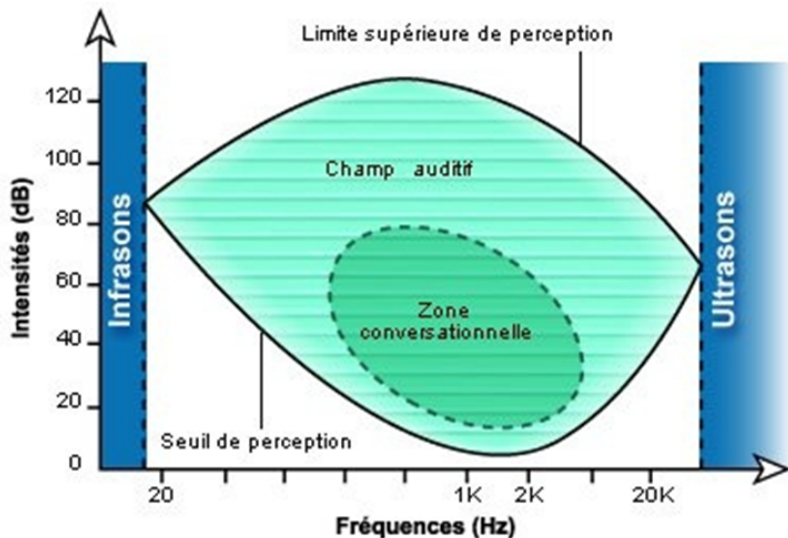


### Domaine audible suivant l'espèce



## 3.0. Ondes sonores

### Champ auditif humain



**Visualisation d'ondes sonores stationnaires : tube de Ruben**

<https://www.youtube.com/watch?v=pWekXMZJ2zM>

- 1 Ondes sur une corde vibrante
- 2 Propriétés de l'équation de D'Alembert
- 3 Ondes sonores
- 4 Compléments**
  - Impédances
  - Réflexion et transmission

- 1 Ondes sur une corde vibrante
- 2 Propriétés de l'équation de D'Alembert
- 3 Ondes sonores
- 4 Compléments**
  - Impédances
  - Réflexion et transmission

## 4.1. Impédances

Une onde décrit de manière générale deux grandeurs physiques couplées. Le flux d'énergie est une fonction du produit de ces deux variables couplées. Une de ces deux variables est de type "position" et l'autre est une dérivée temporelle (de type "vitesse"). Ces deux variables sont reliées entre elles par une impédance  $Z$ . L'impédance intervient alors dans le vecteur densité de courant d'énergie. Pour toute onde, on a une densité d'énergie volumique  $u$  et un vecteur densité de courant d'énergie  $\vec{\Pi}$  reliés par l'équation locale de conservation de l'énergie

$$\text{div } \vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Exemple d'impédance : pour une onde électromagnétique progressive, on a  $E = n\frac{B}{c}$ , et les variables couplées sont  $\vec{E}$  et  $\frac{\vec{B}}{c}$ . L'impédance  $Z$  se résume donc à l'indice du milieu considéré  $Z = n$ .



## 4. Impédances

Type d'onde	Grandeurs couplées	vitesse
OEM	$\vec{E}; \vec{B}$ $c$	$v = \frac{c}{n}$
Corde vibrante	$y; T \sin \alpha$	$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$
Onde acoustique	$u; \rho$	$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$
Câble coaxial	$U; I$	$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$

Type d'onde	impédance	$\vec{\Pi}$
OEM	$Z = n$	$Z \epsilon_0 c E^2$
Corde vibrante	$Z = \sqrt{T \mu}$	$Z \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$
Onde acoustique	$Z = \rho v = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}$	$Z \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$
Câble coaxial	$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$Z I^2$

- 1 Ondes sur une corde vibrante
- 2 Propriétés de l'équation de D'Alembert
- 3 Ondes sonores
- 4 Compléments**
  - Impédances
  - Réflexion et transmission**

## 4.2. Réflexion et transmission

Lorsque l'on excite un milieu (ex. force sur une corde), l'onde se propage. Cette propagation est caractérisée par une impédance  $Z$  (**propre au milieu de propagation**).

À une interface entre deux milieux d'impédances différentes, une partie de l'énergie seulement est transmise, l'autre partie est réfléchi. Il s'agit d'une situation semblable (généralisation) au cas d'une onde électromagnétique sur un dioptre entre deux milieux. On montre que les coefficients de réflexion  $r$  et transmission  $t$  en amplitude sont

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

## 4. Réflexion et transmission

On comprend ainsi l'importance de la notion d'impédance : elle permet de calculer les coefficients de réflexion  $r$  et de transmission  $t$ . En jouant sur l'impédance d'un milieu, on peut également limiter les réflexions (si  $Z_1 \sim Z_2$ ,  $r \sim 0$ ) : on parle d'**adaptation d'impédance** (ex. : utilisation d'un gel pendant une échographie).



## 4. Réflexion et transmission

Soit  $u$  la perturbation  $(\vec{E}, y, p, I)$ , on a alors

$$u_{\text{refl.}} = r u_{\text{incident}} \quad ; \quad u_{\text{trans.}} = t u_{\text{incident}}.$$

Mais attention,  $r$  et  $t$  sont des coefficients en **amplitude**.  
Du point de vu énergétique

$$\Pi \propto Z u^2,$$

alors

$$\Pi_{\text{incident}} \propto Z_1 u_{\text{incident}}^2,$$

$$\Pi_{\text{refl.}} \propto Z_1 u_{\text{refl.}}^2,$$

et

$$\Pi_{\text{trans.}} \propto Z_2 u_{\text{trans.}}^2.$$

## 4. Réflexion et transmission

De plus,

$$Z_1 u_{\text{refl.}}^2 = Z_1 \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 u_{\text{incident}}^2,$$

$$Z_2 u_{\text{trans.}}^2 = \frac{4Z_1^2}{(Z_1 + Z_2)^2} u_{\text{incident}}^2,$$

donc

$$Z_1 u_{\text{refl.}}^2 + Z_2 u_{\text{trans.}}^2 = Z_1 u_{\text{incident}}^2 \left( \frac{4Z_1 Z_2 + (Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \right) = Z_1 u_{\text{incident}}^2.$$

On a donc **conservation de l'énergie**.

## 4. Réflexion et transmission

### Exemples :

#### Cas où $Z_1 = Z_2$

Alors  $R = 0$  et  $T = 1$  : il n'y a pas de réflexion, toute l'intensité est transmise. Le cas  $Z_1 = Z_2$  correspond à la situation triviale où l'on est dans le même milieu mais pas seulement.

#### Adaptation progressive de l'impédance

C'est par exemple le pavillon acoustique.

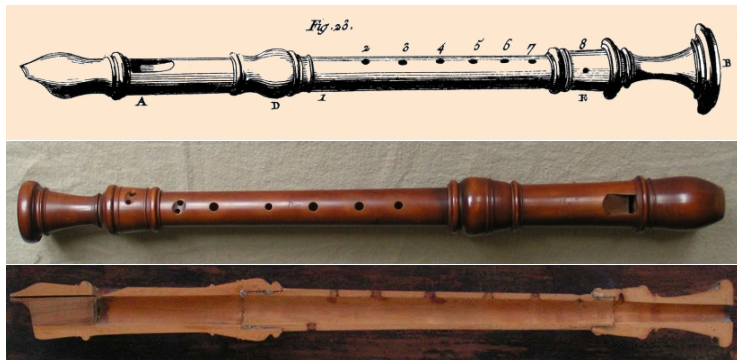


[https://fr.wikipedia.org/wiki/Impédance\\_acoustique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Impédance_acoustique)

## 4. Réflexion et transmission

### Cas où $Z_2 = 0$

Alors le milieu 2 réfléchit également intégralement l'onde, car  $\Pi_t \propto Z_2 = 0$ . Mais les amplitudes à l'interface sont nulles :  $r = +1$  mais  $t = 2$ . C'est une extrémité ouverte. C'est le cas d'une flûte dans le contexte des ondes acoustiques.



<http://www.flute-a-bec.com>



## 4. Réflexion et transmission

**Cas où  $Z_2 = +\infty$**

Alors on a  $r_{12} = -1$  et  $t_{12} = 0$ . On a une réflexion totale au point de séparation. L'onde incidente se superpose à l'onde réfléchi : la grandeur propagée s'annule à la surface de séparation ( $r_{12} = -1$ ). On parle d'*extrémité fermée*. Par exemple, c'est le cas d'un miroir pour les ondes électromagnétiques.



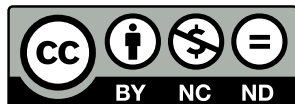
<https://fr.wikipedia.org/wiki/Miroir>

## 4. Réflexion et transmission

### Cas d'une impédance dite "adaptée"

Si on ferme sur une impédance "adaptée"  $Z_c = Z_1$ , on absorbe l'onde sans la réfléchir. Cela introduit la notion d'adaptation d'impédance pour maximiser la transmission d'énergie d'un milieu à l'autre (ex. pavillon acoustique d'un instrument de musique).

This work is licensed under a Creative Commons “Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International” license.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>