

# Ondes électromagnétiques dans les milieux

HA8402H – Physique et sciences de l'ingénieur 4

**Kenneth MAUSSANG**

Université de Montpellier

Polytech Montpellier – PeiP

2021 – 2022

# Objectifs du chapitre

- O4.1 Établir une équation d'onde à partir des équations de Maxwell dans un milieu conducteur ohmique.
- O4.2 Caractériser une onde évanescente et connaître ses propriétés (longueur de peau).
- O4.3 Introduire le modèle du métal parfait.
- O4.4 Établir une équation d'onde à partir des équations de Maxwell dans un milieu diélectrique.
- O4.5 Étudier le comportement d'une onde à l'interface entre deux milieux de propagation (transmission/réflexion).
- O4.6 Introduire et caractériser les ondes stationnaires.
- O4.7 Étude des aspects énergétiques (transmission/réflexion, cas des ondes stationnaires).

- 1 Propagation dans un milieu matériel
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission

- 1 Propagation dans un milieu matériel
  - Cas d'un conducteur
  - Propagation dans un milieu diélectrique
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission

- 1 Propagation dans un milieu matériel
  - Cas d'un conducteur
  - Propagation dans un milieu diélectrique
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission

## 1.1. Cas d'un conducteur

On considère un matériau conducteur, ohmique. La loi d'Ohm locale donne  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , où  $\sigma$  est la conductivité électrique. On a les équations de Maxwell

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

## 1.1. Cas d'un conducteur

On considère un matériau conducteur, ohmique. La loi d'Ohm locale donne  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , où  $\sigma$  est la conductivité électrique. On a les équations de Maxwell

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

## 1.1. Cas d'un conducteur

Équation de l'onde dans un métal

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1)$$

On cherche une solution de type OPPM

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

On obtient la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\sigma.$$



## 1.1. Cas d'un conducteur

En exploitant la relation  $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ , on a

$$\boxed{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{\omega^2 / c^2} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}}.$$

Pour les ondes optiques,  $f \sim 10^{14}$  Hz soit  $\omega \sim 10^{15}$  rad/s. La grandeur  $\omega_c = \sigma / \varepsilon_0$  est une pulsation caractéristique.

Métal	$\sigma$ (S·m <sup>-1</sup> )	$\omega_c = \sigma / \varepsilon_0$ (rad·s <sup>-1</sup> )	$\lambda = 2\pi c / \omega_c$ (Å)
Cu	$6 \cdot 10^7$	$6,8 \cdot 10^{18}$	2,8
Au	$4,5 \cdot 10^7$	$5,1 \cdot 10^{18}$	3,7
Fe	$1 \cdot 10^7$	$1,13 \cdot 10^{18}$	17
Ag	$6,3 \cdot 10^7$	$7,13 \cdot 10^{18}$	2,6

## 1.1. Cas d'un conducteur

Pour les ondes électromagnétiques aux fréquences allant jusqu'aux rayons X, on peut négliger le terme  $\omega^2/c^2$  devant  $\omega\mu_0\sigma$  pour les métaux ohmiques. Dans cette limite, l'équation d'onde se résume à

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

On obtient ainsi la relation de dispersion d'une onde électromagnétique dans un métal

$$k^2 = -j\omega\mu_0\sigma.$$

On introduit la grandeur  $\delta$  homogène à une longueur telle que

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} \Rightarrow k = \pm\frac{1}{\delta}(1-j).$$

## 1.1. Cas d'un conducteur

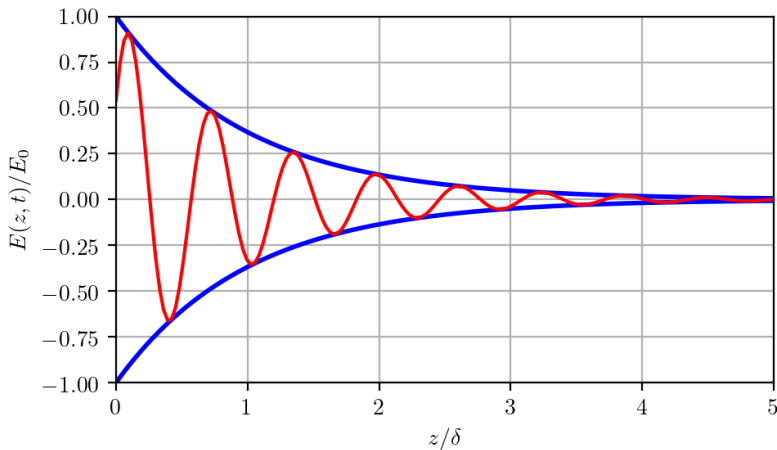
Si on considère une onde incidente se propageant dans la direction  $\vec{k} = k\vec{u}_z$ , le champ électrique dans le métal prend la forme suivante

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta})}.$$

L'onde est **atténuée** sur une échelle spatiale  $\delta$ , appelée **épaisseur de peau**. La dépendance de  $\delta$  avec la pulsation de l'onde est  $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ , avec  $\omega$  inférieur au cas limite des ondes UV ( $\omega \sim 10^{15} - 10^{16}$  rad/s).

Pour le cuivre, dans le visible,  $\omega \sim 10^{14} - 10^{15}$  rad/s soit des longueurs de peau de l'ordre de 10nm typiquement! Ainsi,  $\delta \ll \lambda$  pour des ondes optiques ou de fréquences inférieures : **une onde optique ou de fréquence inférieure ne se propage pas dans un métal.**

## 1.1. Cas d'un conducteur

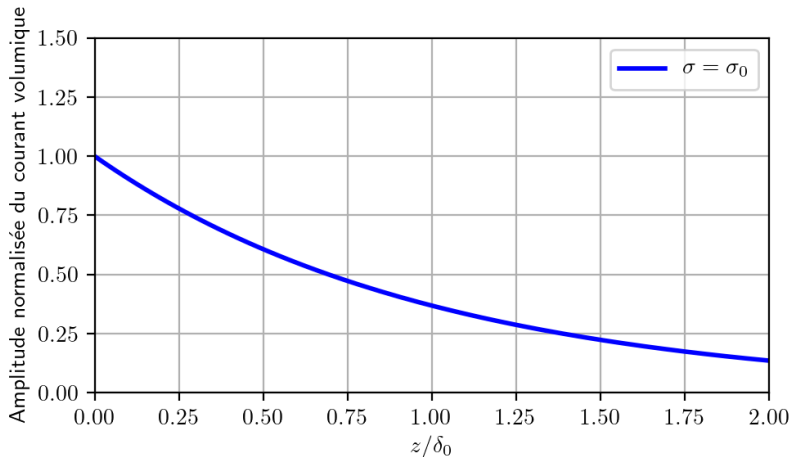


## 1.1. Cas d'un conducteur

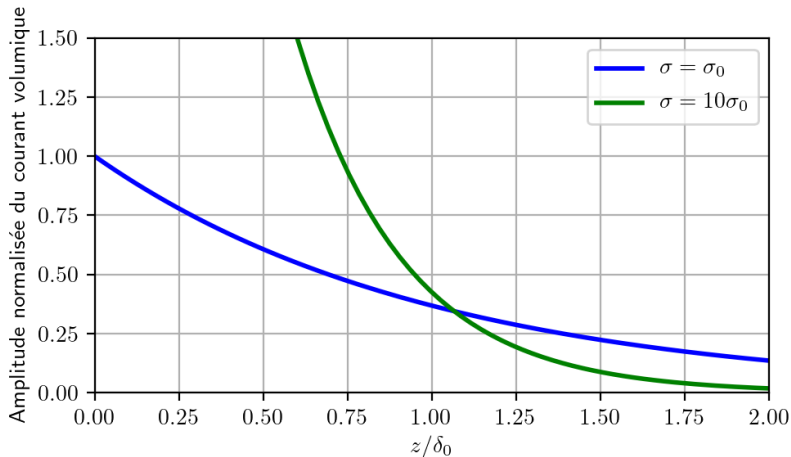
La densité volumique de courant  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  est également atténuée sur une distance caractéristique  $\delta$ . Si la conductivité électrique  $\sigma$  augmente, l'amplitude du courant augmente d'autant (car  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ) mais il s'atténue sur une distance plus courte.

Dans la limite où  $\sigma \rightarrow +\infty$ , la densité de courant volumique se concentre à la surface du conducteur et devient une distribution surfacique.

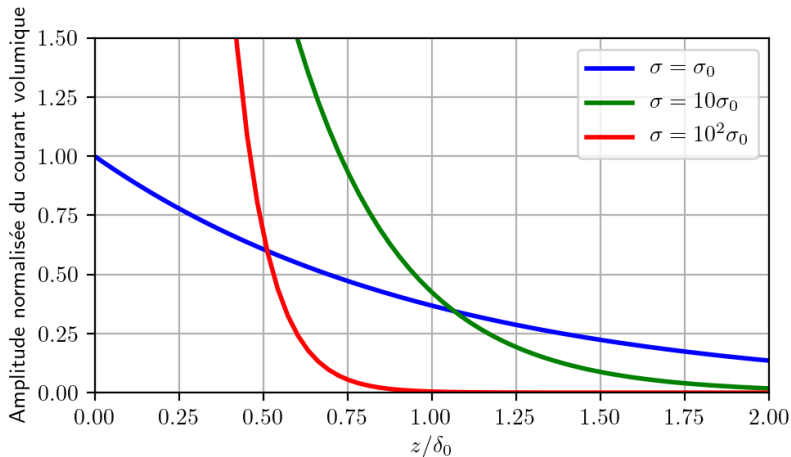
## 1.1. Cas d'un conducteur



## 1.1. Cas d'un conducteur

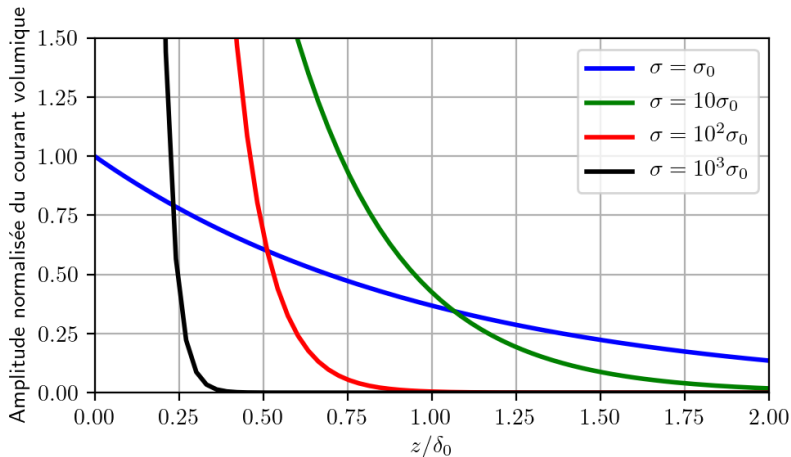


## 1.1. Cas d'un conducteur





## 1.1. Cas d'un conducteur



### Cas limite : modèle du métal parfait

Le métal parfait est une situation idéale où  $\sigma \rightarrow +\infty$ . Par conséquent, on a  $\delta \rightarrow 0$ . Alors dans le métal  $\vec{E} = \vec{0}$  et par conséquent  $\vec{j} = \vec{0}$ . Mais dans ce modèle limite, il existe des courants surfaciques non nuls  $\vec{j}_S(\vec{r}, t)$  à l'interface entre le métal et le milieu extérieur (l'air par exemple).

## 1.1. Cas d'un conducteur

On peut évaluer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$ . Ce dernier est un produit de deux champs, **il est indispensable de revenir en notation réelle pour l'évaluer!**

Si on considère une onde incidente polarisée selon  $\vec{u}_x$ , on a

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right).$$

## 1.1. Cas d'un conducteur

Il faut calculer le champ  $\vec{B}$ . Pour cela, on considère l'équation de Maxwell

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B},$$

où l'équivalence n'est vraie que pour une onde plane monochromatique de vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

Ainsi, pour une onde plane monochromatique de vecteur d'onde  $\vec{k}$ ,

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}.$$

## 1.1. Cas d'un conducteur

Ainsi, en notation réelle (attention,  $k \in \mathbb{C}$ )

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{\delta\omega} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{z}{\delta}} \left( \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right).$$

Donc

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0\delta\omega} e^{-2\frac{z}{\delta}} \left( \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2\omega t - 2\frac{z}{\delta}\right) \right) \vec{u}_z.$$

## 1.1. Cas d'un conducteur

En pratique, on s'intéresse à la valeur moyenne du vecteur de Poynting

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega} e^{-2\frac{z}{\delta}} \vec{u}_z.$$

Ainsi, le flux d'énergie moyen décroît sur une échelle caractéristique  $\delta/2$ .

- 1 Propagation dans un milieu matériel
  - Cas d'un conducteur
  - Propagation dans un milieu diélectrique
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission

## 1.2. Propagation dans un milieu diélectrique



### Définition : diélectrique

Un milieu est dit diélectrique s'il ne contient pas de charges électriques susceptibles de se déplacer de façon macroscopique. Ainsi, il s'agit d'un milieu **isolant**, permettant la propagation des ondes électromagnétiques : c'est un milieu "transparent". Ethymologiquement, diélectrique a pour suffixe *dia* issu du grec  $\delta\iota\alpha$  signifiant *à travers*.

Dans un tel milieu,  $\vec{j} = \vec{0}$ .



## 1.2. Propagation dans un milieu diélectrique

**L'interaction entre l'onde et la matière peut être décrite à l'aide d'une seule grandeur : la permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r$ .**

Dans ce cas, **on admet** que les équations de Maxwell s'écrivent sous la forme

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}, \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (5)$$

La grandeur  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  est la permittivité absolue du milieu considéré.

## 1.2. Propagation dans un milieu diélectrique

Équation d'onde dans un milieu diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$

$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

On introduit la *vitesse de phase*  $v$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}},$$

permettant de reformuler l'équation d'onde sous la forme

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

## 1.2. Propagation dans un milieu diélectrique

La propagation d'une onde dans un diélectrique est identique à la propagation dans le vide mais à la seule exception qu'elle se propage à une vitesse corrigée  $v = c/\sqrt{\epsilon_r}$ . On introduit l'**indice optique**  $n$  selon

$$n = \sqrt{\epsilon_r}.$$

Alors, on a la relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{v} \Rightarrow k = n \frac{\omega}{c} \text{ ou } k = nk_0,$$

$k_0$  étant le vecteur d'onde si on était dans le vide.

## 1.2. Propagation dans un milieu diélectrique

On définit toujours la longueur d'onde selon

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \text{ donc } \boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}},$$

où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide. Ainsi, **la longueur d'onde dépend du milieu de propagation.**

## 1.2. Propagation dans un milieu diélectrique

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right),$$

soit

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}\left(0, t - \frac{z}{v}\right),$$

et ainsi l'onde se déplace à une vitesse réduite  $v < c$  ( $n > 1$ ). Si l'indice est réel, il n'y a pas d'absorption. Si l'indice a une partie imaginaire non nulle, alors il y a de l'absorption.

## 1.2. Propagation dans un milieu diélectrique

### Calcul du vecteur de Poynting

On a toujours

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega},$$

mais la relation de dispersion est modifiée. Ainsi, pour une propagation dans la direction  $\vec{u}$ , on a

$$\vec{k} = n \frac{\omega}{c} \vec{u}.$$

On retrouve une structure d'onde plane où  $(\vec{k}; \vec{E}; \vec{B})$  forme un trièdre direct. On admet également que dans un milieu diélectrique, le vecteur de Poynting est toujours défini selon

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

## 1.2. Propagation dans un milieu diélectrique

On considère une onde plane monochromatique, progressive dans le sens des  $z$  positifs ( $\vec{k} = +k\vec{u}_z$  avec  $k > 0$ ), polarisée rectilignement selon  $\vec{u}_x$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - kz)},$$

et alors, après calculs,

$$\vec{\Pi} = \frac{nE_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z.$$

D'où la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting

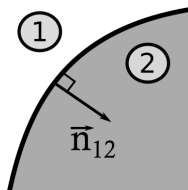
$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{nE_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z.$$

- 1 Propagation dans un milieu matériel
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
  - Relations de passage du champ
  - Réflexion sur un miroir métallique
  - Ondes stationnaires
  - Bilan énergétique
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission



- 1 Propagation dans un milieu matériel
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
  - Relations de passage du champ
  - Réflexion sur un miroir métallique
  - Ondes stationnaires
  - Bilan énergétique
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission

## 2.1. Relations de passage du champ



On considère une interface entre deux milieux 1 et 2, dont on note  $\vec{n}_{12}$  le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2. On note également  $\sigma_S$  la densité surfacique de charge à cette interface, et  $\vec{j}_S$  le vecteur densité de courant surfacique à cette interface.

Les champs électrique  $\vec{E}_1$  et magnétique  $\vec{B}_1$  dans le milieu 1 à l'interface, ainsi que les champs électrique  $\vec{E}_2$  et magnétique  $\vec{B}_2$  dans le milieu 2 à l'interface vérifient les relations de passage suivantes, **que l'on admettra**

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0} \vec{n}_{12},$$

et

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}.$$

- 1 Propagation dans un milieu matériel
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
  - Relations de passage du champ
  - Réflexion sur un miroir métallique
  - Ondes stationnaires
  - Bilan énergétique
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission

## 2.2. Réflexion sur un miroir métallique

Dans un métal parfait,  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = \vec{0}$  (si sa conductivité électrique est infinie),  $\vec{E} = \vec{0}$ ,  $\vec{B} = \vec{0}$  et la densité surfacique de charge à l'interface est nulle :  $\sigma_S = 0$  (il ne peut pas y avoir de charges libres sinon elles se déplaceraient). En revanche, on peut avoir des courants surfaciques  $\vec{j}_S$  non nuls. On envoie une onde incidente de la forme

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = E_i^0 e^{j(\omega t - k_i z)} \vec{u}_x,$$

sur le miroir situé en  $z = 0$ . L'onde ne pénètre pas le miroir parfait mais une onde réfléchie apparaît

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = E_r^0 e^{j(\omega t + k_r z)} \vec{u}_x.$$

Ici on a un signe + devant le vecteur d'onde car l'onde réfléchie se propage vers les  $z$  négatifs ( $\vec{k} = -k_r \vec{u}_z$ ). L'onde réfléchie oscille à la même fréquence que l'onde incidente.

## 2.2. Réflexion sur un miroir métallique

De part la continuité du champ électrique à l'interface, on obtient

$$E_r^0 = -E_i^0.$$

Pour le champ magnétique, on a

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega},$$

soit

$$\vec{B}_i = \frac{E_i^0}{c} e^{j(\omega t - k_i z)} \vec{u}_y,$$

et, en prenant garde que  $\vec{k}_r = -k_r \vec{u}_z$ ,

$$\vec{B}_r = -\frac{E_r^0}{c} e^{j(\omega t + k_r z)} \vec{u}_y.$$

## 2.2. Réflexion sur un miroir métallique

Donc, en exprimant les champs en fonction de  $E_i^0$ ,

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = -E_i^0 e^{j(\omega t + k_r z)} \vec{u}_x,$$

$$\vec{B}_r(\vec{r}, t) = \frac{E_i^0}{c} e^{j(\omega t + k_r z)} \vec{u}_y.$$

On en déduit le courant  $\vec{j}_S$  à la surface du métal

$$\mu_0 \vec{j}_S = \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_{T,2} - \vec{B}_{T,1}) = -\vec{u}_z \wedge \left( \frac{2E_0}{c} \cos \omega t \vec{u}_y \right),$$

soit

$$\vec{j}_S = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \vec{u}_x.$$

Ces courants surfaciques ont pour origine l'excitation des électrons du métal par le champ électrique de l'onde incidente.

- 1 Propagation dans un milieu matériel
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
  - Relations de passage du champ
  - Réflexion sur un miroir métallique
  - **Ondes stationnaires**
  - Bilan énergétique
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission

## 2.3. Ondes stationnaires

La superposition d'une onde incidente à l'onde réfléchi sur un miroir parfait établit une onde dite stationnaire. En notation réelle ( $k_i = k_r = k$ )

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_i(\vec{r}, t) + \vec{E}_r(\vec{r}, t) = E_{0,i} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_{0,r} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x.$$

Or,  $E_{0,r} = -E_{0,i} = -E_0$  d'où

$$\vec{E}_{\text{tot}} = E_0 (\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz)) \vec{u}_x.$$

Après calculs,

$$\boxed{\vec{E}_{\text{tot}}(\vec{r}, t) = 2E_0 \sin \omega t \sin kz \vec{u}_x.}$$



## 2.3. Ondes stationnaires

Il s'agit d'une solution de l'équation d'onde à *variables séparées*, avec un découplage entre les dépendances temporelles et spatiales. L'onde ne se propage plus, elle "oscille sur place". On a des **noeuds** et des **ventres**.

### Périodicité des noeuds

Par définition, le champ électrique est nul à tout instant à un noeud, soit

$$\sin kz = 0 \Leftrightarrow 2\pi\frac{z}{\lambda} = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = \frac{\lambda}{2}n.$$

D'où la périodicité des noeuds

$$\Delta z = \frac{\lambda}{2}.$$

### Périodicité des ventres

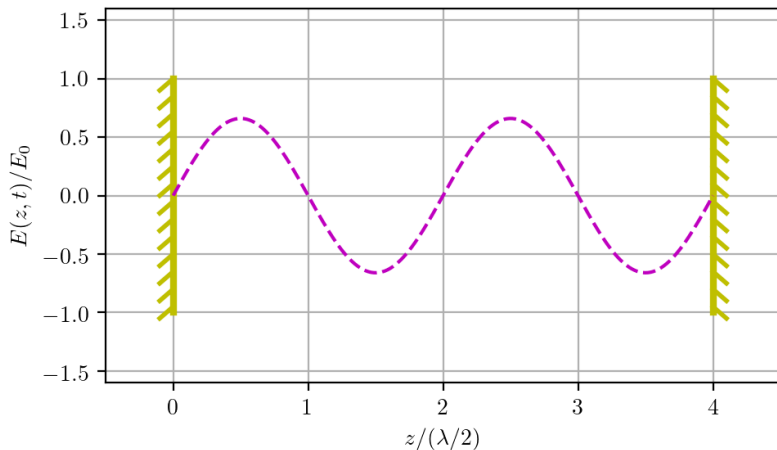
Par définition, le champ électrique est maximal localement à tout instant à un ventre, soit

$$\sin kz = \pm 1 \Leftrightarrow 2\pi \frac{z}{\lambda} = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = \frac{\lambda}{2}n + \frac{\lambda}{4},$$

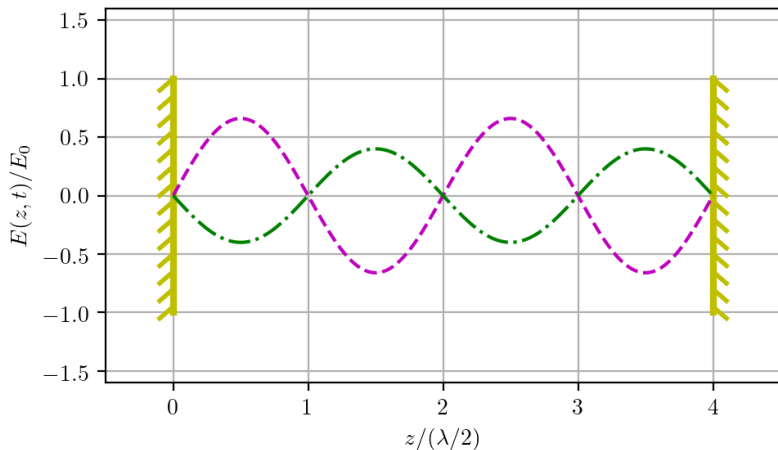
D'où la périodicité des ventres

$$\Delta z = \frac{\lambda}{2}.$$

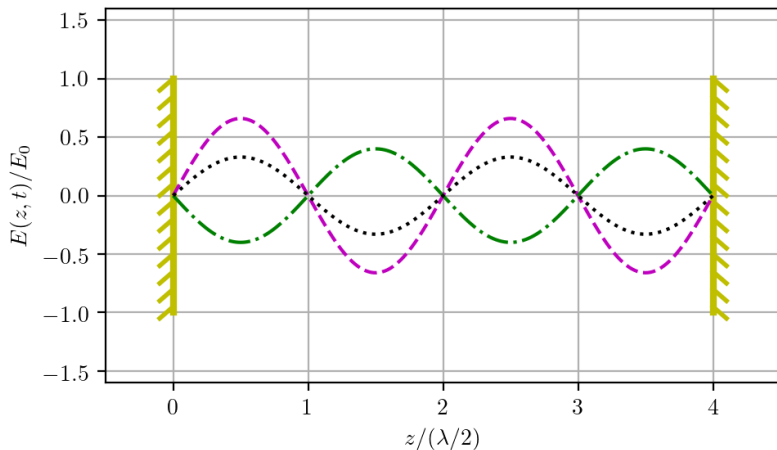
## 2.3. Ondes stationnaires



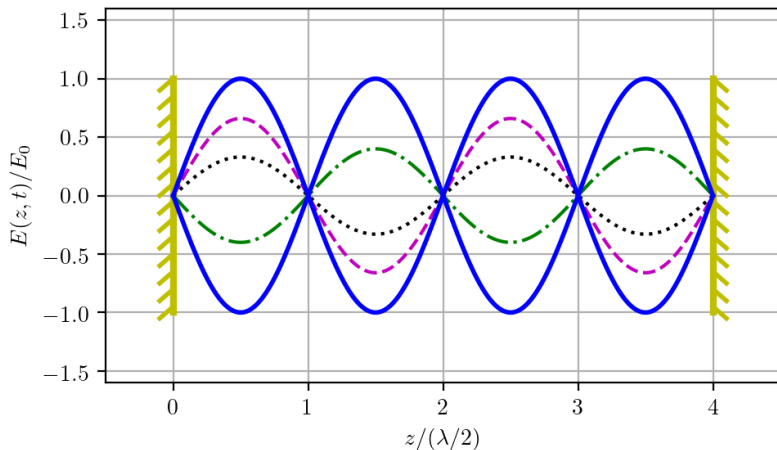
## 2.3. Ondes stationnaires



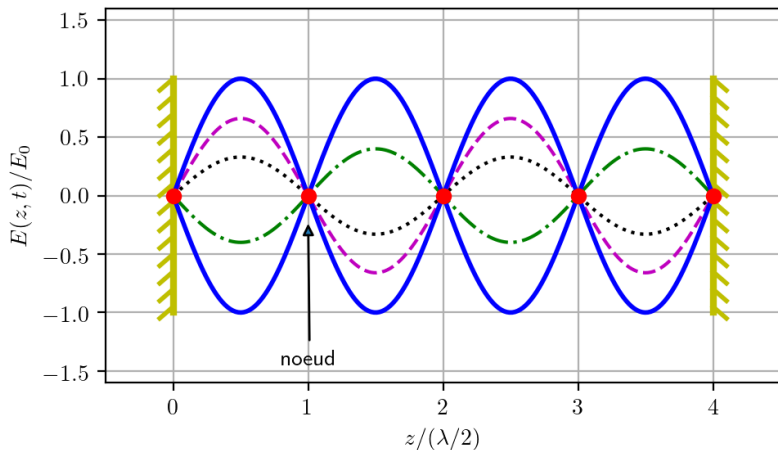
## 2.3. Ondes stationnaires



## 2.3. Ondes stationnaires

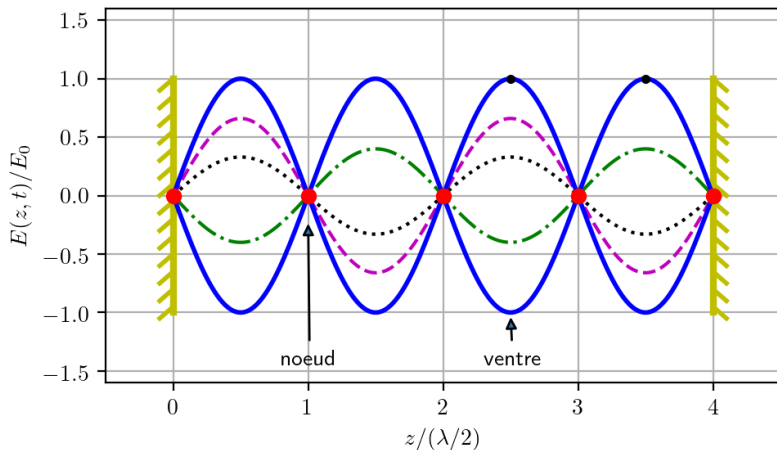


## 2.3. Ondes stationnaires

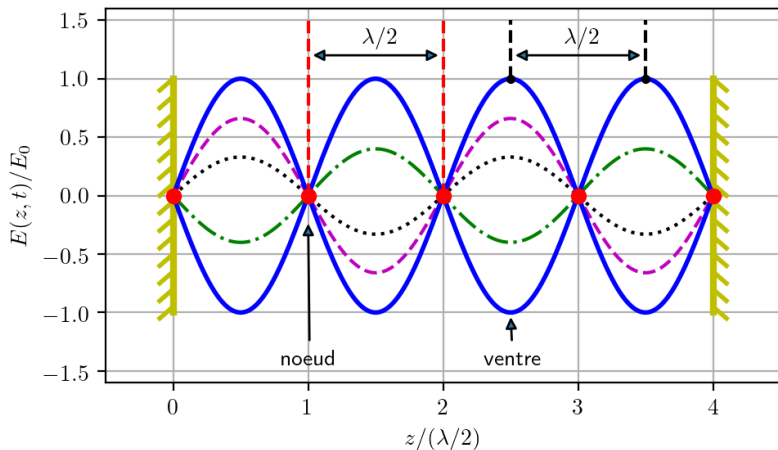




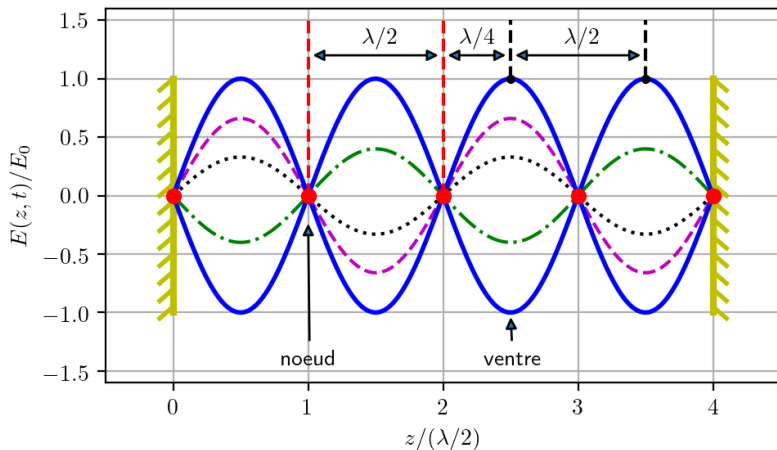
## 2.3. Ondes stationnaires



## 2.3. Ondes stationnaires



## 2.3. Ondes stationnaires



## 2.3. Ondes stationnaires

Pour le champ magnétique  $\vec{B}$ , on calcul de la même manière

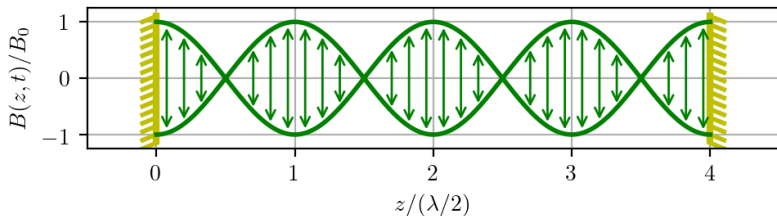
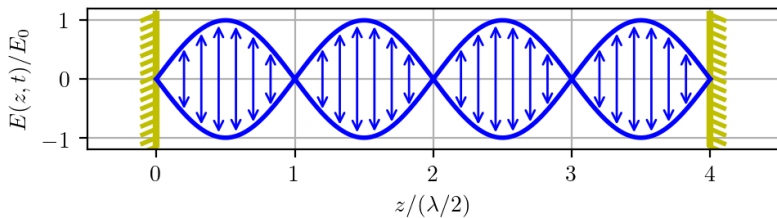
$$B_y = \frac{E_0}{c} (\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)),$$

d'où

$$B_y = \frac{2E_0}{c} \cos \omega t \cos kz.$$

On a un ventre de champ magnétique au niveau du miroir.

## 2.3. Ondes stationnaires



- 1 Propagation dans un milieu matériel
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
  - Relations de passage du champ
  - Réflexion sur un miroir métallique
  - Ondes stationnaires
  - Bilan énergétique
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission

## 2.4. Bilan énergétique

Vecteur de Poynting de l'onde incidente  $\vec{\Pi}_i$

$$\vec{\Pi}_i = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix},$$

soit

$$\vec{\Pi}_i = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z.$$

**Vecteur de Poynting moyen**

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z.$$

## 2.4. Bilan énergétique

Pour le rayon réfléchi, on a

$$\vec{\Pi}_r = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} -E_0 \cos(\omega t + kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\vec{\Pi}_r = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + kz) \vec{u}_z.$$



## 2.4. Bilan énergétique

Et le vecteur de Poynting réfléchi moyen devient

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z.$$

On en déduit

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle + \langle \vec{\Pi}_r \rangle = \vec{0}.$$

Il n'y a pas de pertes, toute l'énergie incidente est réfléchi (miroir parfait).

- 1 Propagation dans un milieu matériel
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission**
  - Incidence normale
  - Lois de Descartes
  - Principe de Fermat

- 1 Propagation dans un milieu matériel
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission
  - Incidence normale
  - Lois de Descartes
  - Principe de Fermat

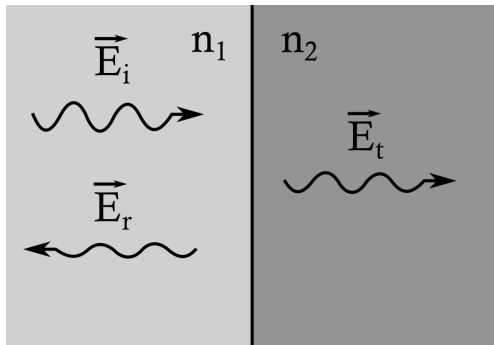


### **Définition : dioptre**

Un dioptre est la surface à l'interface entre deux milieux diélectriques de natures différentes.

## 3.1. Incidence normale

Lorsqu'une onde incidente arrive sur un dioptre, on peut avoir une onde réfléchiée et une onde transmise. On considère un dioptre entre un milieu 1 d'indice  $n_1$  et un milieu 2 d'indice  $n_2$ . On considère que le dioptre est un plan  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ , soumis à une onde incidente polarisée rectilignement selon  $\vec{u}_x$ .



Transmission et réflexion d'une onde au travers d'un dioptre.

## 3.1. Incidence normale

On a

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_i^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_i z)} \quad \text{et} \quad \vec{B}_i(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ n_1 \frac{E_i^0}{c} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_i z)},$$

$$\vec{E}_t(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_t^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_t z)} \quad \text{et} \quad \vec{B}_t(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \frac{E_t^0}{c} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_t z)},$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_r^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t + k_r z)} \quad \text{et} \quad \vec{B}_r(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -n_1 \frac{E_r^0}{c} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t + k_r z)}.$$

où l'on a pris  $k_r > 0$  et  $\vec{k}_r = -k_r \vec{u}_z$ .

## 3.1. Incidence normale

### Relations de passage des champs à l'interface

À l'interface, on

$$\Delta E_T = 0 \Rightarrow E_i^0 + E_r^0 = E_t^0.$$

Il n'y a pas de courants dans les milieux (diélectriques) donc

$$\Delta B_T = 0 \Rightarrow B_i^0 + B_r^0 = B_t^0,$$

On obtient alors

$$\boxed{E_t^0 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_i^0} \quad \text{et} \quad \boxed{E_r^0 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_i^0}. \quad (6)$$

## 3.1. Incidence normale

On en déduit les vecteurs de Poynting moyens

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{n_1 E_{i,0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z,$$

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{n_1 E_{r,0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z = -\frac{n_1 (n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \frac{E_{i,0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z,$$

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{n_2 E_{t,0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z = \frac{4n_1^2 n_2}{2\mu_0 c (n_1 + n_2)^2} \frac{E_{i,0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z.$$



## 3.1. Incidence normale

On en déduit les coefficients de transmission et réflexion en **énergie**  $R$  et  $T$

$$R = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 ; \quad T = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_t \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} .$$

On remarque en particulier que

$$R + T = 1 ,$$

exprimant la conservation de l'énergie.

- 1 Propagation dans un milieu matériel
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission**
  - Incidence normale
  - Lois de Descartes**
  - Principe de Fermat

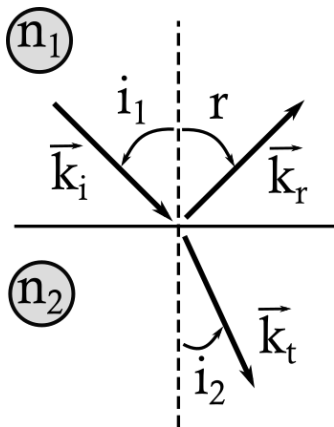
## 3.2. Lois de Descartes

Lois de Descartes pour une onde incidente avec un vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ .

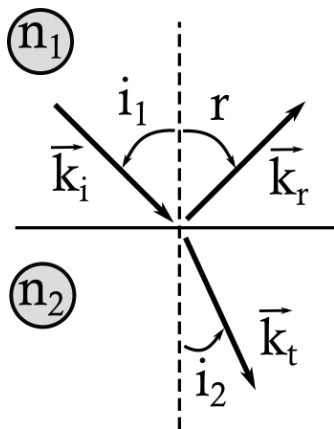
Une onde est transmise avec un vecteur d'onde  $\vec{k}_t$  et une onde est réfléchie avec un vecteur d'onde  $\vec{k}_r$ .

Le vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  et la normale à l'interface définissent le plan d'incidence.

On note  $i_1$ ,  $r$  et  $i_2$  les angles entre la normale à l'interface et les vecteurs d'ondes de l'onde incidente, réfléchie et transmise.



## 3.2. Lois de Descartes



- 1<sup>er</sup> loi de Descartes : le plan d'incidence contient les rayons incidents, réfléchis et réfractés (admis).
- 2<sup>e</sup> loi de Descartes : loi de la réflexion,

$$i_1 = -r$$

- 3<sup>e</sup> loi de Descartes : loi de la réfraction,

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

- 1 Propagation dans un milieu matériel
- 2 D'un milieu à un autre : réflexion
- 3 Passage entre deux diélectriques : transmission**
  - Incidence normale
  - Lois de Descartes
  - Principe de Fermat**

### 3.3. Principe de Fermat

Soit A et B deux points de l'espace (d'indice  $n(\vec{r})$ ) reliés par un chemin  $\mathcal{C}$ . On définit le chemin optique le long de  $\mathcal{C}$  selon

$$L[AB] = \int_{\mathcal{C}} n(\vec{r}) ds,$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne le long du chemin.



#### Principe de Fermat

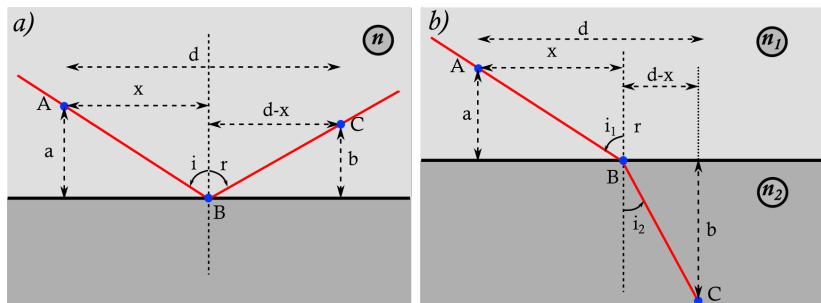
Le chemin optique est extrême lorsque le chemin  $\mathcal{C}$  suivi est celui des rayons lumineux. La lumière suit un chemin rendant le chemin optique correspondant extrême : "la lumière emprunte le chemin le plus court" (cas le plus fréquent).

**Conséquence importante :** dans un milieu homogène, la propagation s'effectue en ligne droite.

### 3.3. Principe de Fermat

**Le principe de Fermat permet de démontrer les lois de Descartes.**

Démonstration de la loi de la réflexion (a) et de la réfraction (b) à partir du principe de Fermat.



## **Animation GeoGebra**

<https://www.geogebra.org/m/S2qrjFm6>



Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Pas de modification 4.0 International”.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>

