

# Les équations de Maxwell

HA8402H – Physique et sciences de l'ingénieur 4

**Kenneth MAUSSANG**

Université de Montpellier

Polytech Montpellier – PeiP

2021 – 2022

# Objectifs du chapitre

- O1.1 Connaître les équations de Maxwell
- O1.2 Manipuler les opérateurs vectoriels et les théorèmes associés. Orienter une surface ou un contour, définir un flux d'une grandeur physique à travers une surface orientée et le calculer à partir de son vecteur densité de courant volumique.
- O1.3 Retrouver les résultats de l'électrostatique à partir des équations de Maxwell.
- O1.4 Retrouver les résultats de la magnétostatique à partir des équations de Maxwell.
- O1.5 Appliquer le théorème de Gauss.
- O1.6 Appliquer le théorème d'Ampère.

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique
- 7 Approximation des régimes quasistationnaires (ARQS)
- 8 Compléments

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
  - Notion d'opérateurs vectoriels
  - Équations de Maxwell
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
  - Notion d'opérateurs vectoriels
  - Équations de Maxwell
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique

# 1.1. Notion d'opérateurs vectoriels

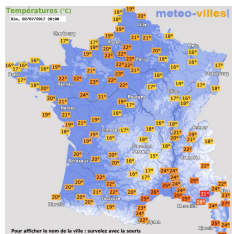
Un champ associé à tout instant une grandeur physique (scalaire ou vectorielle) à un point de l'espace.

## Champ scalaire

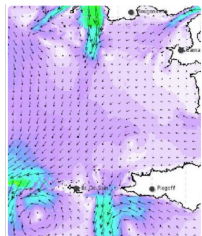
$$M(\vec{r}, t) \longrightarrow f(\vec{r}, t)$$

## Champ vectoriel

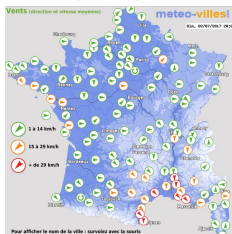
$$M(\vec{r}, t) \longrightarrow \vec{a}(\vec{r}, t)$$



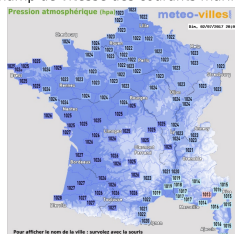
champ de températures



champ de vitesse des courants marins



champ de vitesse des vents

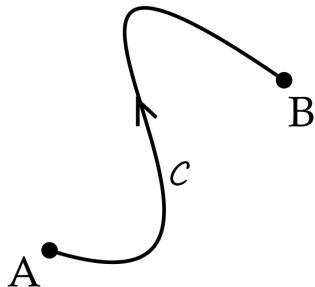


champ de pression atmosphérique

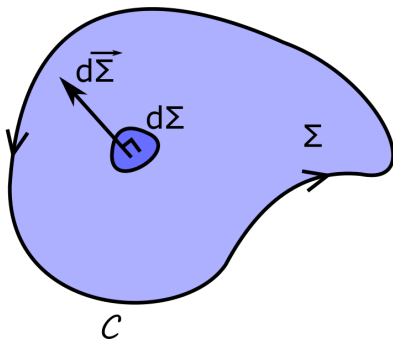
# 1.1. Notion d'opérateurs vectoriels

Chemins et contours sont **orientés**.

Chemin  $C$  entre A et B

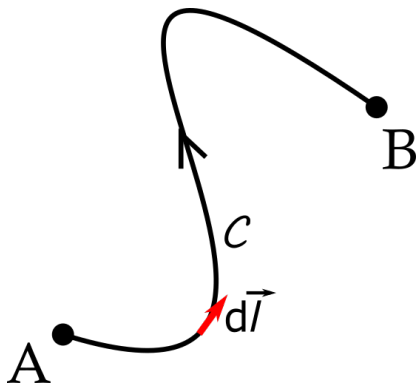


Surface  $\Sigma$  délimitée par un chemin fermé  $C$ .



## 1.1. Notion d'opérateurs vectoriels

Circulation d'un champ vectoriel  $\vec{a}(\vec{r}, t)$  sur un chemin  $\mathcal{C}$ .



On note  $d\vec{l}$  un déplacement élémentaire sur  $\mathcal{C}$ .

**Circulation élémentaire**

$$\delta C = \vec{a}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l}.$$

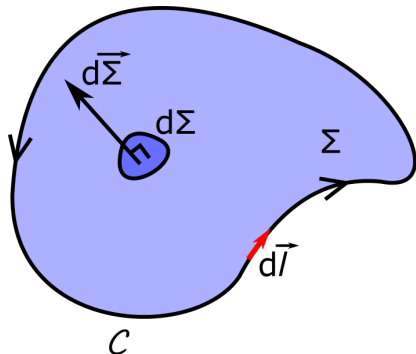
**Circulation sur un chemin  $\mathcal{C}$**

$$C = \int_{\mathcal{C}} \vec{a}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l}.$$



## 1.1. Notion d'opérateurs vectoriels

**Flux d'un champ vectoriel  $\vec{a}(\vec{r}, t)$  à travers une surface orientée  $\Sigma$ .**



On note  $d\vec{\Sigma}$  le vecteur surface élémentaire, orienté selon l'orientation du chemin  $\mathcal{C}$  définissant la surface  $\Sigma$ .

**Flux élémentaire**

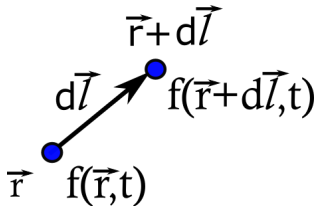
$$\delta\phi = \vec{a}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{\Sigma}.$$

**Flux à travers une surface  $\Sigma$**

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{a}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{\Sigma}.$$

## 1.1. Notion d'opérateurs vectoriels

Un opérateur vectoriel agit sur un champ. À un champ scalaire  $f(\vec{r}, t)$  il peut faire correspondre un champ vectoriel. Exemple : **l'opérateur gradient.**



Définition intrinsèque de l'opérateur gradient :

$$df = f(\vec{r} + d\vec{l}, t) - f(\vec{r}, t),$$

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l}.$$

### Expression de l'opérateur gradient dans les différents systèmes de coordonnées

- En cartésiennes

$$\vec{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z,$$

- en cylindriques

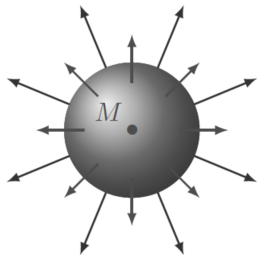
$$\vec{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z,$$

- en sphériques

$$\vec{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi.$$

## 1.1. Notion d'opérateurs vectoriels

À un champ vectoriel  $\vec{a}(\vec{r}, t)$  il peut faire correspondre un champ scalaire. Exemple : **l'opérateur divergence**.



### Définition intrinsèque de l'opérateur divergence.

Divergence en  $M$  du champ vectoriel  $\vec{a}$  :

rapport du flux **sortant** au travers d'une surface  $d\Sigma$  entourant  $M$  et le volume  $dV$  qu'elle délimite

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\delta\phi}{dV}.$$



### Expression de l'opérateur divergence dans les différents systèmes de coordonnées

- En cartésiennes

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

- en cylindriques

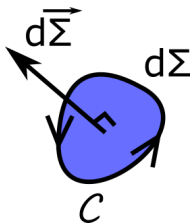
$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial r a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

- en sphériques

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi}.$$

## 1.1. Notion d'opérateurs vectoriels

À un champ vectoriel  $\vec{a}(\vec{r}, t)$  il peut faire correspondre un champ vectoriel. Exemple : **l'opérateur rotationnel**.



### Définition intrinsèque de l'opérateur rotationnel.

Rotationnel en  $M$  du champ vectoriel  $\vec{a}$  :

circulation  $\delta C$  sur un chemin  $\mathcal{C}$  délimitant une surface orientée  $d\vec{\Sigma}$ . Le rotationnel de  $\vec{a}$  est alors défini par la relation suivante

$$\text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{\Sigma} = \delta C.$$

### Expression de l'opérateur rotationnel dans les différents systèmes de coordonnées

- En cartésiennes

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{a} &= \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y \\ &\quad + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z,\end{aligned}$$

- en cylindriques

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{a} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r \\ &\quad + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z,\end{aligned}$$



### Expression de l'opérateur rotationnel dans les différents systèmes de coordonnées

- en sphériques

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{a} &= \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta a_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{u}_r \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r a_\phi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi.\end{aligned}$$



### Opérateur laplacien scalaire.

On considère un champ scalaire  $f$ .



#### Définition intrinsèque du laplacien scalaire

Le laplacien scalaire, conventionnellement noté par le symbole  $\Delta$  est défini par la relation

$$\Delta f = \operatorname{div} \left( \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \right).$$

## Opérateur laplacien scalaire.



### Expression de l'opérateur rotationnel dans les différents systèmes de coordonnées

- en coordonnées cartésiennes

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

- en coordonnées cylindriques

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

- en coordonnées sphériques

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2},$$

## 1.1. Notion d'opérateurs vectoriels

### Opérateur laplacien vectoriel.

Le laplacien vectoriel, noté conventionnellement  $\Delta$ , transforme un vecteur en un vecteur. Son expression, en coordonnées cartésiennes, est



#### Laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes

$$\Delta \vec{a} = \Delta a_x \vec{u}_x + \Delta a_y \vec{u}_y + \Delta a_z \vec{u}_z.$$



#### Définition intrinsèque du Laplacien vectoriel

$$\Delta \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{a}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}).$$



### **Théorème de Green-Ostrogradski**

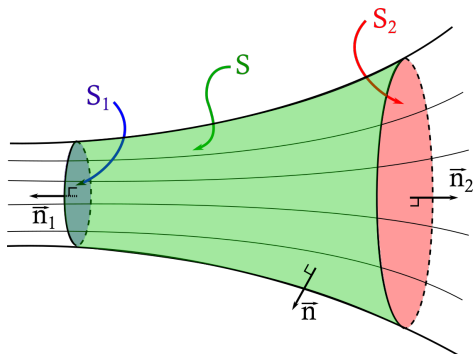
Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée est égale à l'intégrale de sa divergence sur le volume délimité par cette surface

$$\oiint \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint \operatorname{div} \vec{a} dV.$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradski, tout champ à divergence nulle a un flux nul à travers toute surface fermée : on dit qu'il est à flux conservatif.

# 1.1. Notion d'opérateurs vectoriels

## Champ à flux conservatif.



Si l'on construit une surface fermée  $\Sigma$  à partir d'un tube de champ (ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un chemin fermé) et de deux sections  $S_1$  et  $S_2$  de ce tube, un champ à flux conservatif a un flux nul à travers  $\Sigma$ .

Or, il est nul à travers la surface latérale de  $\Sigma$  par construction. Le flux du champ de vecteurs est donc le même à travers les surfaces identiquement orientées  $\vec{S}_1$  et  $\vec{S}_2$ .

Donc

$$\boxed{\phi_{S_1} = \phi_{S_2}}$$



### **Champ à flux conservatif**

Tout champ de vecteurs à divergence nulle est à flux conservatif : son flux à travers toute surface fermée est nul, son flux est identique à travers toute section d'un tube de champ.

Ce résultat permet de faire des prédictions pour les champs vectoriels à flux conservatifs à partir des cartes de champ : dans des portions d'espace où les lignes de champ se resserrent, le champ doit avoir un module plus élevé.

## 1.1. Notion d'opérateurs vectoriels

### Opérateur nabla

On utilise souvent l'opérateur symbolique  $\vec{\nabla}$ , appelé opérateur *nabla* et s'exprimant en coordonnées cartésiennes de la façon suivante

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z.$$

Cet opérateur agit sur le champ scalaire  $f$ , de sorte que son gradient peut s'exprimer à partir de l'opérateur nabla

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f.$$

On a également

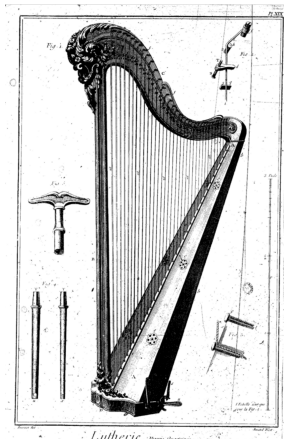
$$\text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}.$$

# 1.1. Notion d'opérateurs vectoriels

## Opérateur nabla

La définition, mais sans intitulé, de l'opérateur *nabla*  $\vec{\nabla}$  a été introduite par William Rowan Hamilton en 1847, et Peter Guthrie Tait en a développé la théorie à partir de 1867. Le nom *nabla* lui fut donné par Tait sur l'avis de William Robertson Smith, en 1870, par analogie de forme avec une harpe grecque qui dans l'antiquité portait ce nom (νάβλα, *nábla*).

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Nabla>



Extrait de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert, volume 4 (1767).

Source : Gallica.

<https://gallica.bnf.fr>



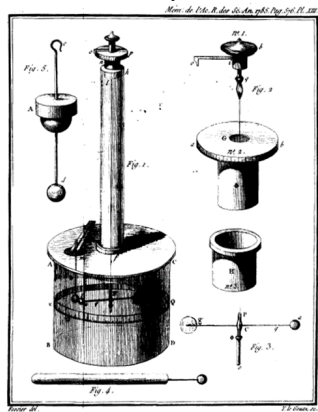
- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
  - Notion d'opérateurs vectoriels
  - Équations de Maxwell
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique

## 1.2. Équations de Maxwell



Charles-Augustin Coulomb  
(1736-1806)

Lois de l'électrostatique établies en 1785.



La balance de torsion de Coulomb  
(gravure des Mémoires de l'Académie  
des Sciences), 1784)

## 1.2. Équations de Maxwell

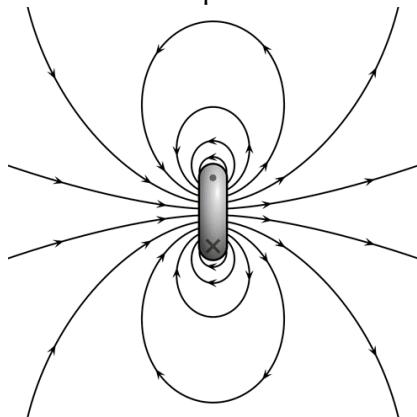


Jean-Baptiste  
Biot  
(1774-1862)

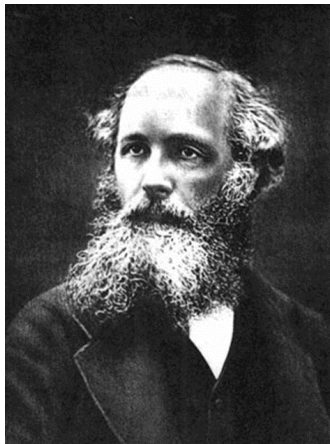


Félix Savart  
(1791-1841)

Lois de la magnétostatique  
établies en 1820 par Biot et Savart.



## 1.2. Équations de Maxwell



James Clerk Maxwell  
(1831-1879)

### **Equations de Maxwell en 1865.**

Systeme de quatre équations locales régissant l'électromagnétisme, et le couplage entre champ électrique et champ magnétique en dynamique.

## 1.2. Équations de Maxwell

En tout point de l'espace et à chaque instant, les champs vectoriels électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  vérifient le système de quatre équations suivant (**les équations de Maxwell**)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4)$$

où  $\rho$  est la densité volumique de charge électrique et  $\vec{j}$  le vecteur densité volumique de courant électrique.

## 1.2. Équations de Maxwell

Il s'agit des **équations de Maxwell**, les deux premières sont des équations dites *de structure*, alors que les deux dernières sont des équations dites *aux sources* des champs (la densité volumique de charge  $\rho$  et la densité volumique de courant électrique  $\vec{j}$ ).

L'équation 2 est dite équation de Maxwell-Faraday, l'équation 3 est dite équation de Maxwell-Gauss et l'équation 4 est dite équation de Maxwell-Ampère.

Nous verrons plus tard l'origine de ces dénominations.

## 1.2. Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell **couplent les champs électriques et magnétiques aux sources** (courants électriques et charges électriques).

Les équations de Maxwell permettent de décrire **l'électrostatique, la magnétostatique, les ondes électromagnétiques et l'optique**.

L'électromagnétisme est une des **quatre interactions fondamentales** (gravitation, électromagnétisme, interaction faible, interaction forte).

## 1.2. Équations de Maxwell

La perméabilité magnétique du vide  $\mu_0$  et la permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$  sont des constantes qui dépendent du système d'unité choisi. Dans le système d'unité international (SI), on a

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F} \cdot \text{m}, \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}, \\ \epsilon_0 \mu_0 c^2 &= 1,\end{aligned}$$

avec  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  la vitesse de la lumière dans le vide.



Termes de sources ?  
**Charges et courants.**

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
  - Densité volumique de charge
  - Densité volumique de courant
  - Conductivité électrique
  - Symétries
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
  - Densité volumique de charge
  - Densité volumique de courant
  - Conductivité électrique
  - Symétries
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique

## 2.1. Densité volumique de charge

On définit la densité volumique de charge par

$$\rho = \frac{\delta q}{\delta V},$$

où  $\delta q$  est la charge contenue dans le volume  $\delta V$ . C'est l'équivalent de la masse volumique pour la charge électrique. La densité volumique de charge a pour unité SI le  $\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$ . À partir de cette densité volumique de charge, champ scalaire de l'espace, on peut calculer la charge  $Q$  contenue dans un volume  $V$  fini

$$Q = \iiint_V \rho dV.$$

## 2.1. Densité volumique de charge

On peut également définir des distributions surfaciques et linéiques, plus adaptées à la modélisation de certaines situations. On définit ainsi

- $\sigma$  la charge surfacique en  $\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ ;
- $\lambda$  la charge linéique en  $\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$ .

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
  - Densité volumique de charge
  - **Densité volumique de courant**
  - Conductivité électrique
  - Symétries
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique

## 2.2. Densité volumique de courant

On définit la densité volumique de courant  $\vec{j}$  comme le courant de déplacement des charges. Si les charges ont une densité volumique  $\rho$  et une vitesse  $\vec{v}$ , alors

$$\vec{j} = \rho \vec{v},$$

par analogie avec l'hydrodynamique. L'unité SI de  $\vec{j}$  est donc le  $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$ .

Soit  $S$  une surface orientée, de vecteur normal local  $\vec{n}$ . Le courant électrique  $I$  traversant la surface  $S$  est le flux de  $\vec{j}$  à travers la surface  $S$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS.$$

L'unité SI de  $\vec{j}$  est donc le  $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$ .

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
  - Densité volumique de charge
  - Densité volumique de courant
  - **Conductivité électrique**
  - Symétries
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique



## 2.3. Conductivité électrique

Un conducteur est un matériau qui permet le déplacement des charges, contrairement à l'isolant qui lui ne le permet pas. On caractérise le matériau par sa conductivité  $\sigma$ , reliant  $\vec{j}$ , le vecteur densité de courant électrique, à l'acteur du mouvement des charges, le champ électrique  $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}.$$

Cette relation est appelée **loi d'Ohm locale**. La conductivité est une propriété du matériau, indépendamment de la géométrie. La résistance d'un matériau dépend de la conductivité ET de la géométrie du conducteur.

## 2.3. Conductivité électrique

Dans le cas d'un conducteur cylindrique de section  $S$  et de longueur  $l$ , la résistance de ce conducteur cylindrique vaut

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}.$$

Si  $\sigma$  est faible, on a un isolant, si  $\sigma$  est grand, on a un conducteur.

Quelques ordres de grandeur

matériau	Cu	Fe	Al	Sn	C	SiO <sub>2</sub>
$\sigma$ ( $\Omega \cdot \text{m}^{-1}$ )	$6 \cdot 10^7$	$10^7$	$4 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^4$	$10^{-17}$

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
  - Densité volumique de charge
  - Densité volumique de courant
  - Conductivité électrique
  - Symétries
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique

## 2.4. Symétries

En électrostatique et magnétostatique, les symétries des distributions sources impactent directement les structures des champs et notamment leurs propriétés de symétries.

Dans le cas du champ électrostatique, tout plan de symétrie de la distribution de charges est un plan de symétrie du champ électrique. Ainsi, en particulier, si  $M$  est un point d'un plan de symétrie de la distribution de charges, alors le champ électrique en  $M$  est nécessairement contenu dans ce plan de symétrie. De même, tout plan d'antisymétrie de la distribution de charges est un plan d'antisymétrie du champ électrique. Ainsi, en particulier, si  $M$  est un point d'un plan d'antisymétrie de la distribution de charges, alors le champ électrique en  $M$  est nécessairement orthogonal à ce plan d'antisymétrie.

## 2.4. Symétries

Dans le cas du champ magnétostatique, tout plan de symétrie de la distribution de courants est un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Ainsi, en particulier, si  $M$  est un point d'un plan de symétrie de la distribution de courants, alors le champ magnétique en  $M$  est nécessairement orthogonal à ce plan de symétrie. De même, tout plan d'antisymétrie de la distribution de courants est un plan de symétrie du champ magnétique. Ainsi, en particulier, si  $M$  est un point d'un plan d'antisymétrie de la distribution de courants, alors le champ magnétique en  $M$  est nécessairement contenu dans ce plan d'antisymétrie.

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
  - Potentiel électrostatique  $V$
  - Surface équipotentielle
  - Effet de pointe - pression électrostatique
  - Théorème de Stokes
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
  - **Potentiel électrostatique  $V$**
  - Surface équipotentielle
  - Effet de pointe - pression électrostatique
  - Théorème de Stokes
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique



### Champ vectoriel dérivant d'un champ scalaire

Soit  $U$  un champ scalaire. On a alors la propriété suivante

$$\vec{\text{rot}} \left( \overrightarrow{\text{grad}} U \right) = \vec{0},$$

pour tout champ scalaire  $U$ . Inversement, pour un champ vectoriel  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , on a l'équivalence suivante

$$\forall(\vec{r}, t), \vec{\text{rot}} \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{0}.$$

$$\iff \exists U(\vec{r}, t) \mid \forall(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{grad}} U(\vec{r}, t).$$



## 3.1. Potentiel électrostatique $V$

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit dans le cas général

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En statique, cette équation devient simplement

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}.$$

Cette équation gouverne la structure du champ vectoriel et, dans le cas de la statique, le découple du champ magnétique. Compte-tenu de la propriété mentionnée précédemment,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \exists U(\vec{r}, t) \mid \forall (\vec{r}, t), \vec{E}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{grad}} U(\vec{r}, t).$$

## 3.1. Potentiel électrostatique $V$

Pour être consistant avec l'électrocinétique et l'électrostatique vu précédemment, on introduit **le potentiel électrique**  $V(\vec{r}, t) = -U(\vec{r}, t)$  et l'on retrouve la relation entre champ électrique et potentiel électrostatique  $V(\vec{r}, t)$ . Pour tout champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  physique, on a

$$\boxed{\exists V(\vec{r}, t) \mid \forall(\vec{r}, t), \vec{E}(\vec{r}, t) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(\vec{r}, t)}.$$

De manière plus synthétique, on écrira  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ , ou  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ ,  $V$  est le potentiel électrique, d'unité SI le volt (V). Ainsi, une unité SI du champ électrique est le  $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ .

## 3.1. Potentiel électrostatique $V$

**Remarque importante :** le potentiel électrique  $V$  est défini à une constante, car en effet,  $\forall V_0 \in \mathbb{R}$

$$\vec{\nabla} (V(\vec{r}, t) + V_0) = \vec{\nabla} V(\vec{r}, t).$$

Par conséquent, on ne peut accéder à une valeur de potentiel de manière absolue : on mesure des différences de potentiel, par exemple le 220 V du secteur électrique. Pour des raisons pratiques, on prend souvent une convention d'origine des potentiels, par exemple le potentiel de la Terre, comme référence des potentiels :  $V_{\text{Terre}} = 0$ . Considérons deux points  $A$  et  $B$  de l'espace dont on mesure la différence de potentiel  $V_B - V_A$ ; comment cette dernière est-elle reliée au champ électrique ? À partir de la relation entre champ électrique et potentiel, on a

$$V_B - V_A = \int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
  - Potentiel électrostatique  $V$
  - Surface équipotentielle
  - Effet de pointe - pression électrostatique
  - Théorème de Stokes
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique

## 3.2. Surface équipotentielle



### Définition

Une surface équipotentielle  $\Sigma$  est une surface de l'espace dont tous les points sont au même potentiel électrique

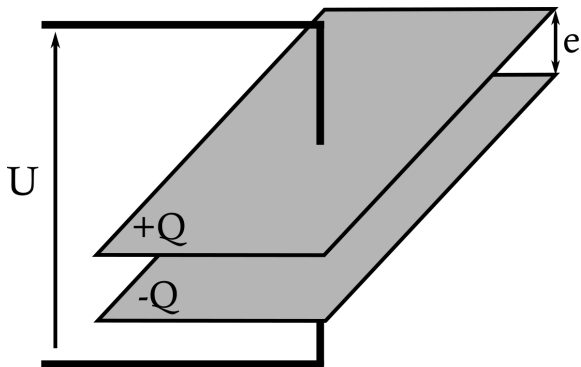
$$\Sigma \text{ surface à } V_0 \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in \Sigma, V(x, y, z) = V_0.$$

**Le champ électrique est orthogonal aux surfaces équipotentielles.**

Dans un conducteur, les charges sont libres de se déplacer pour équilibrer le potentiel. Ainsi,  $\vec{E} = \vec{0}$  à l'intérieur d'un métal. Ainsi le potentiel est constant dans un conducteur et **sa surface est une équipotentielle, et le champ électrique extérieur est donc orthogonal aux surfaces conductrices.**

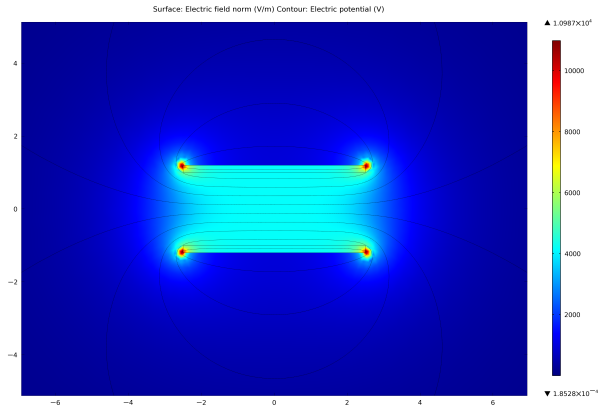
## 3.2. Effet de pointe - pression électrostatique

### Application : condensateur plan



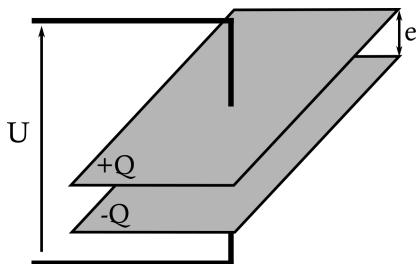
## 3.2. Effet de pointe - pression électrostatique

Condensateur plan et effets de bords.



Calculs numériques des lignes équipotentielles et de la norme du champ électrique pour  $L = 5 \text{ mm}$  et  $e = 2 \text{ mm}$ .

## 3.2. Effet de pointe - pression électrostatique



Densité surfacique de charge sur les plaques  $\sigma = \frac{Q}{S}$ .

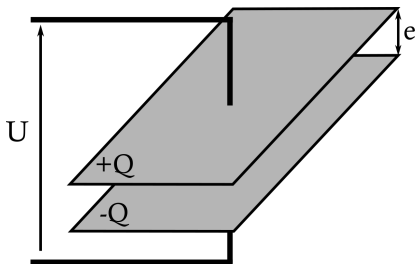
**On admet** que le champ est de la forme

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z,$$

dans la limite du condensateur infini (on néglige les effets de bords).



## 3.2. Effet de pointe - pression électrostatique



$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V,$$

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow V(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}z + V_0.$$

Différence de potentiel

$$U = V(z = 0) - V(z = e),$$

donc

$$U = \frac{Qe}{S\epsilon_0}.$$

On obtient alors la capacité d'un condensateur plan

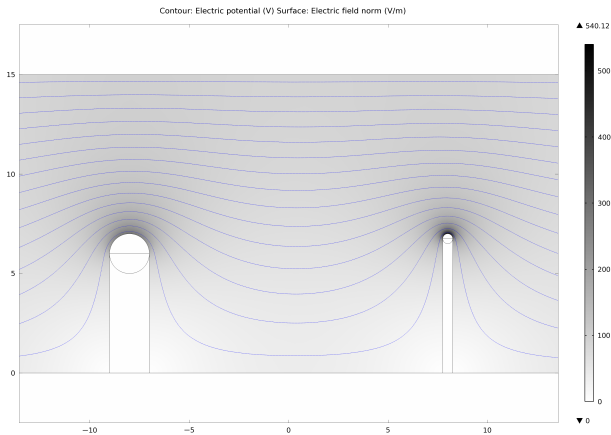
$$Q = CU \Rightarrow C = \frac{S\epsilon_0}{e}.$$

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
  - Potentiel électrostatique  $V$
  - Surface équipotentielle
  - Effet de pointe - pression électrostatique
  - Théorème de Stokes
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique

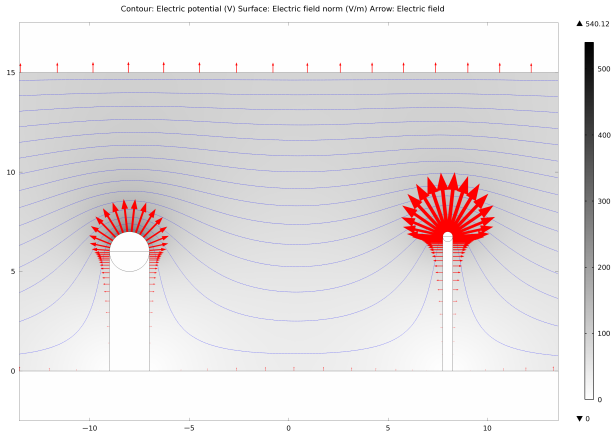
## 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique

### Application : effet de pointe

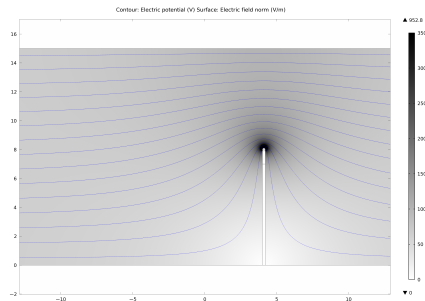
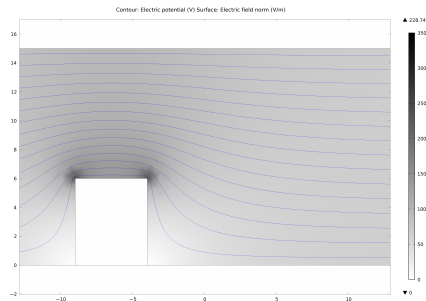


## 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique

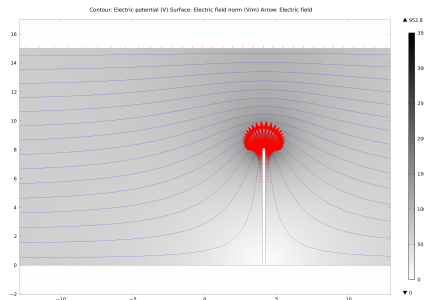
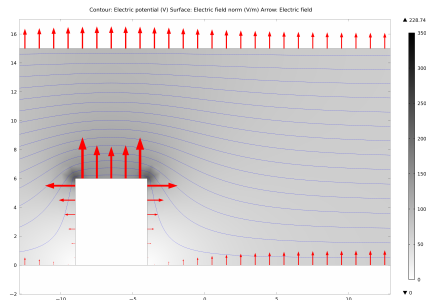
### Application : effet de pointe



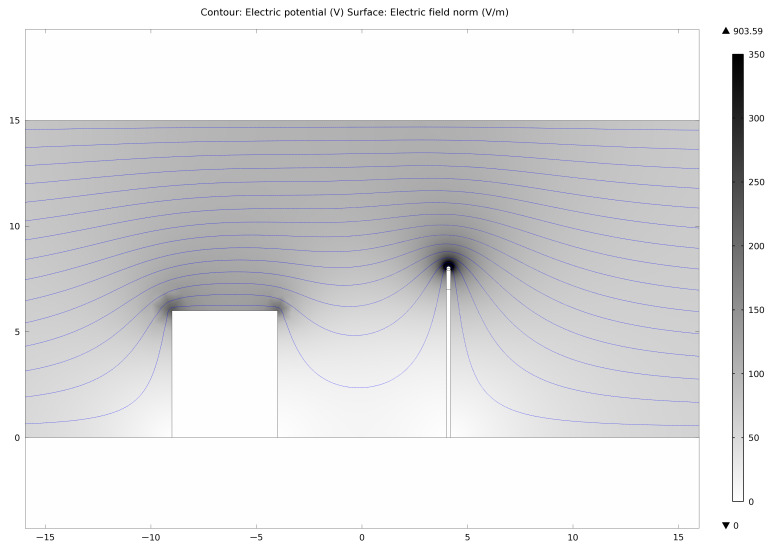
### 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique



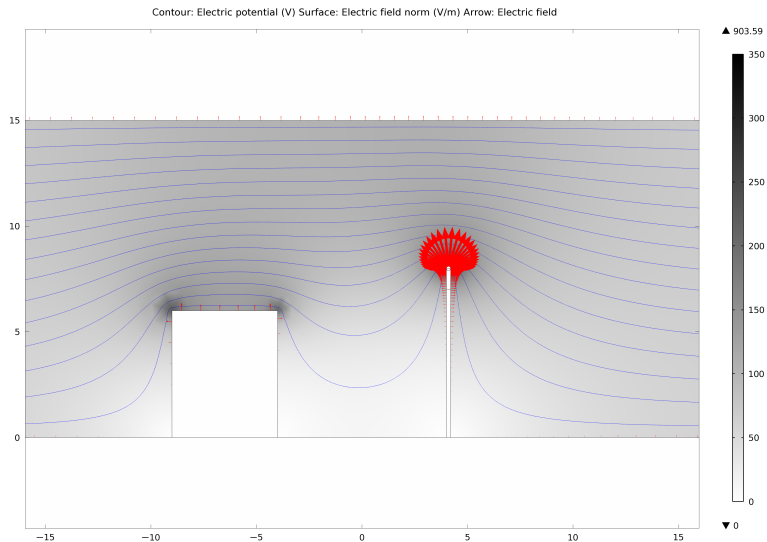
### 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique



### 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique

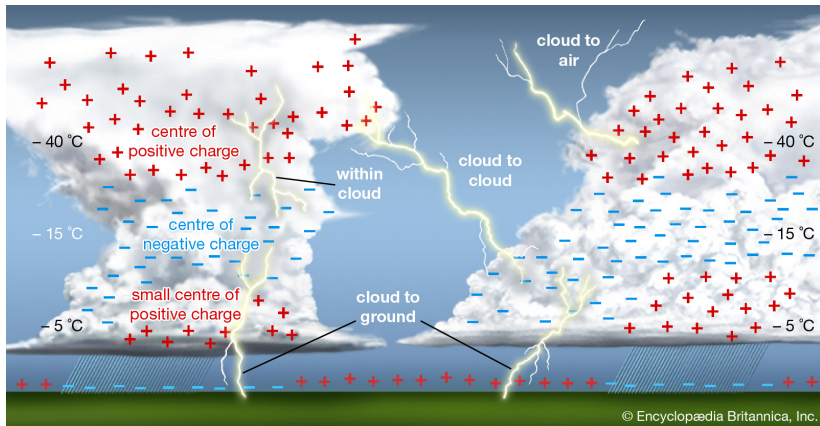


### 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique



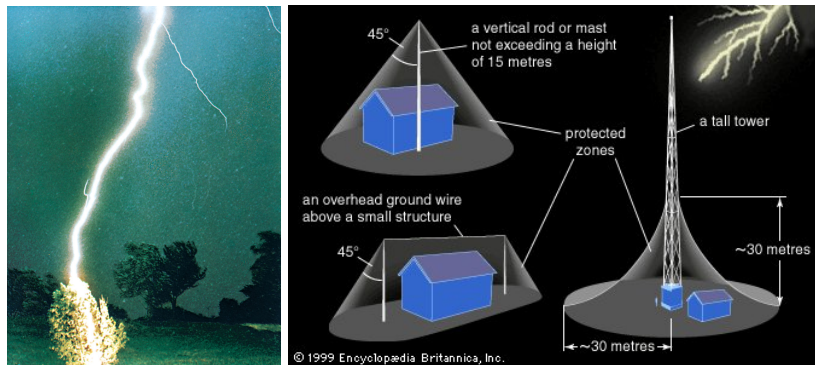


### 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique



<https://www.britannica.com/science/thunderstorm/Thunderstorm-electrification>

### 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique



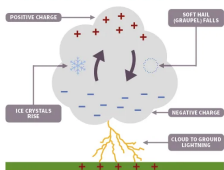
<https://www.britannica.com/science/thunderstorm/Thunderstorm-electrification>

# 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique

## THE SCIENCE OF THUNDERSTORMS

### LIGHTNING

Air updrafts in storm clouds carry small water droplets and ice crystals up, while denser soft hail falls. When they collide, ice crystals become positively charged and soft hail becomes negatively charged. Consequently, the cloud's top becomes positively charged, with its base becoming negatively charged.



The cloud's negatively charged base repels electrons on the ground. Cloud-to-ground lightning is one type of lightning - others also result from the charge difference in clouds.



### THUNDER



#### LIGHTNING TEMPERATURE

**30,000 °C**

Temperature of air channel through which lightning passes

#### THUNDER SPEED

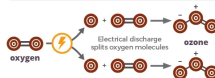
**~ 343 m/s**

Speed approximately 10m in 3s

Lightning causes rapid heating and expansion of nearby air, followed by cooling and contraction. This creates a sonic shock wave - thunder.

### LIGHTNING CHEMISTRY

Lightning strikes can split diatomic oxygen in the air into individual oxygen atoms. These combine with other oxygen molecules to form ozone, giving rise to the 'pre-rain' smell.



Lightning ionises air molecules in its path. The blue-violet colour of lightning is a consequence of light emissions from excited nitrogen and hydrogen atoms.



At the high temperatures lightning generates, nitrogen and oxygen combine to form nitrogen oxides. These dissolve in rain and form nitrates, important for plant growth.



© Andy Brunning/Compound Interest 2018 - [www.compoundchem.com](http://www.compoundchem.com) | Twitter: @compoundchem | FB: [www.facebook.com/compoundchem](https://www.facebook.com/compoundchem)  
This graphic is shared under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives licence.



### 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique

Conséquence : pression électrostatique.

*Illustration expérimentale :*

<https://www.youtube.com/watch?v=Z2TXK7xd5NM>

## 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique

### Application : effet de pointe

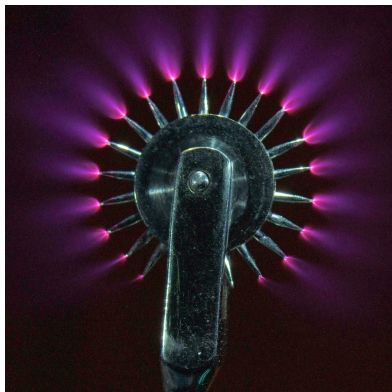


Feu de Saint-Elme sur un bateau.  
The Aerial World, G. Hartwig (1886).

Le feu de Saint-Elme est un phénomène physique, ne se produisant que dans certaines conditions météorologiques, qui se manifeste par des lueurs apparaissant surtout aux extrémités des mâts des navires et sur les ailes des avions certains soirs.

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Feu\\_de\\_Saint-Elme](https://fr.wikipedia.org/wiki/Feu_de_Saint-Elme)

### Application : effet de pointe



Décharge corona ici provoquée sur une roulette de Wartenberg.

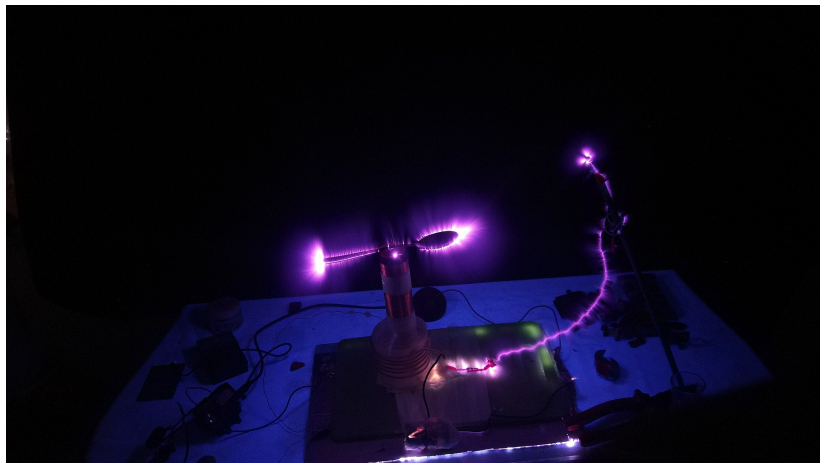
L'effet corona, aussi appelé « effet couronne » ou « effet de couronne », est un phénomène de décharge électrique partielle entraînée par l'ionisation du milieu entourant un conducteur.

https:

[//fr.wikipedia.org/wiki/Effet\\_corona](https://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_corona)

## 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique

### Application : effet de pointe



Décharge Corona d'une cuillère soumise à une haute tension.

## 3.3. Effet de pointe - pression électrostatique

### Application : effet de pointe



Effet de couronne sur un éclateur (ligne de 500 kV); il correspond à une perte en ligne et à une production d'ozone troposphérique polluant.



# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
  - Potentiel électrostatique  $V$
  - Surface équipotentielle
  - Effet de pointe - pression électrostatique
  - Théorème de Stokes
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique



### Théorème de Stokes-Ampère

La circulation le long d'un chemin fermé  $\mathcal{C}$  d'un champ vectoriel est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface  $\Sigma$  s'appuyant sur ce chemin

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{a} \cdot d\vec{\Sigma}.$$

## 3.4. Théorème de Stokes

### Conséquence du théorème de Stokes :

le champ électrostatique est **irrotationnel** ( $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ ), donc de **circulation nulle** sur tout contour fermé de l'espace. C'est une formulation équivalente à  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ . En effet, on a

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint -\vec{\nabla} V \cdot d\vec{l} = \int_A^A -dV = V_A - V_A = 0.$$

On retiendra donc l'équivalence des trois formulations

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists V \mid \vec{E} = -\vec{\nabla} V \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Attention : toutes ces relations sont valables uniquement en STATIQUE!

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
  - Équation de Poisson et loi de Coulomb
  - Théorème d'Ostrogradsky et théorème de Gauss
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
  - Équation de Poisson et loi de Coulomb
  - Théorème d'Ostrogradsky et théorème de Gauss
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique

## 4.1. Équation de Poisson et loi de Coulomb

L'équation de Maxwell-Gauss est une équation aux sources

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

À partir de la relation entre le champ électrique et le potentiel électrique, on obtient l'équation de Poisson

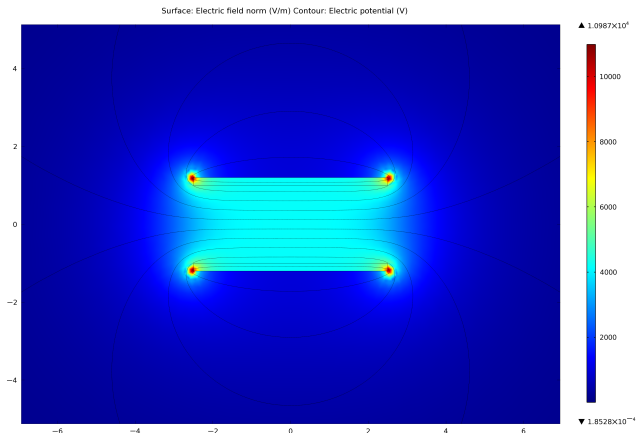
$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

La solution générale de l'équation de Poisson est

$$V(\vec{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3\vec{r}'$$

# 4.1. Équation de Poisson et loi de Coulomb

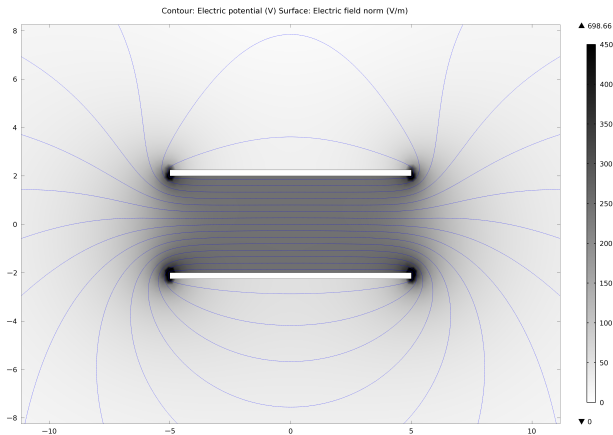
## Application : condensateur plan



Simulation numérique de l'équation de Poisson pour un condensateur plan : ligne équipotentielle et norme du champ électrique.

# 4.1. Équation de Poisson et loi de Coulomb

## Application : condensateur plan

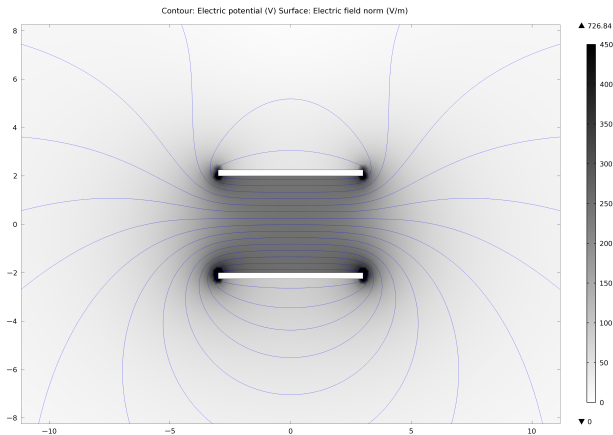


Effets de bords - modèle du condensateur plan infini  
 $L = 10$  mm,  $e = 4$  mm.



# 4.1. Équation de Poisson et loi de Coulomb

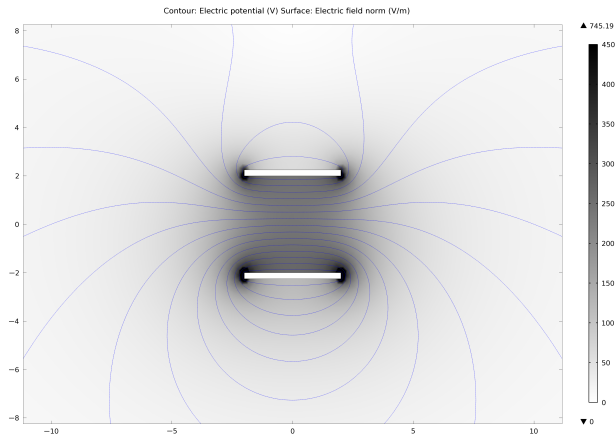
## Application : condensateur plan



Effets de bords - modèle du condensateur plan infini  
 $L = 6 \text{ mm}$ ,  $e = 4 \text{ mm}$ .

# 4.1. Équation de Poisson et loi de Coulomb

## Application : condensateur plan



Effets de bords - modèle du condensateur plan infini

$L = 4 \text{ mm}$ ,  $e = 4 \text{ mm}$ .

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique**
  - Équation de Poisson et loi de Coulomb
  - Théorème d'Ostrogradsky et théorème de Gauss**
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique

## 4.2. Théorème d'Ostrogradsky et théorème de Gauss

**Appliquons le théorème de Green-Ostrogradsky au champ électrostatique.**

Soit un volume  $V$  délimité par une surface  $\Sigma$ , contenant une charge totale  $Q$ . Alors

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q}{\epsilon_0}},$$

avec

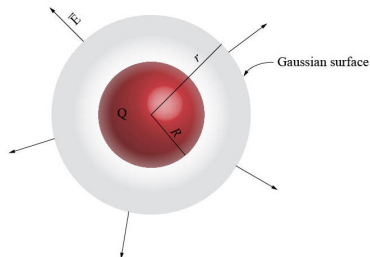
$$Q = \iiint_V \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}.$$



### **Théorème de Gauss**

Le flux de  $\vec{E}$  à travers une surface  $S$  fermée est égal à la somme totale (algébrique) des charges intérieures au volume  $V$  divisées par  $\epsilon_0$ .

## 4.2. Théorème d'Ostrogradsky et théorème de Gauss



### Applications du théorème de Gauss :

Champ électrique d'une distribution à symétrie sphérique. Cas d'une charge totale  $Q$  répartie uniformément dans une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$ .

Densité volumique de charge de la boule

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Figure extraite de

<https://makingphysicsclear.com/applications-gauss-law-electrostatic/>.

## 4.2. Théorème d'Ostrogradsky et théorème de Gauss

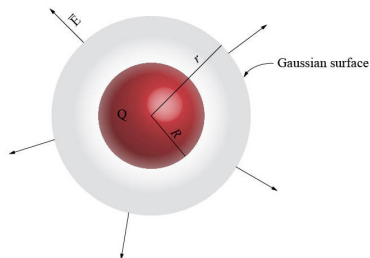


Figure extraite de

<https://makingphysicsclear.com/>

[applications-gauss-law-electrostatic/](https://makingphysicsclear.com/applications-gauss-law-electrostatic/).

**Exploitation des symétries** Tout plan passant par  $M$  et le centre de la boule chargée est un plan de symétrie  $\Pi$ . Chacun de ces plans  $\Pi$  est un plan de symétrie du champ électrique, et  $M \in \Pi$  implique donc que  $\vec{E} \in \Pi$  soit

$$\vec{E} = E(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r.$$

**Exploitation des invariances**

Invariance par rotation de centre  $O$  le centre de la sphère donc

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r.$$

## 4.2. Théorème d'Ostrogradsky et théorème de Gauss

**Théorème de Gauss** appliqué sur la surface  $\Sigma$  formée par une sphère de rayon  $r$

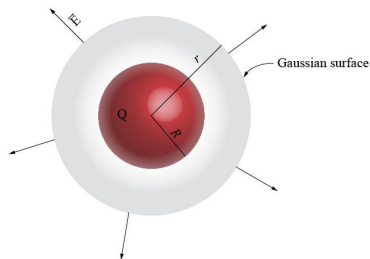


Figure extraite de

<https://makingphysicsclear.com/>

[applications-gauss-law-electrostatic/](#).

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} E(r) d\Sigma,$$

or sur  $\Sigma$ ,  $r$  est constant donc

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} E(r) d\Sigma &= E(r) \oiint_{\Sigma} d\Sigma \\ &= 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon}, \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{E} = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$



## 4.2. Théorème d'Ostrogradsky et théorème de Gauss

Si  $r \leq R$  :

$$Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3},$$

donc

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r}{R} \vec{u}_r.$$

Si  $r \geq R$  :

$$Q_{int} = Q,$$

donc

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique**
  - Sources de champ magnétique
  - Conservation du flux magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique**
  - Sources de champ magnétique
  - Conservation du flux magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique

## 5.1. Sources de champ magnétique

On a l'équation de structure

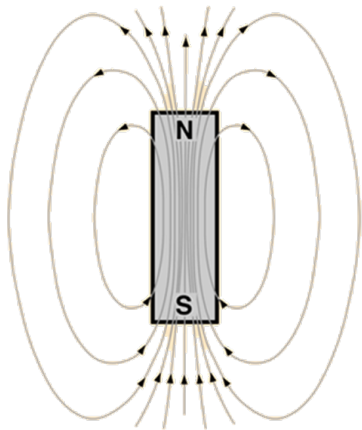
$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}.$$

Le champ magnétique est à flux conservatif. Conséquence : il ne peut pas exister de monopôle magnétique, un champ magnétique radial issu d'un point n'existe pas, il n'existe donc pas de "charge magnétique".

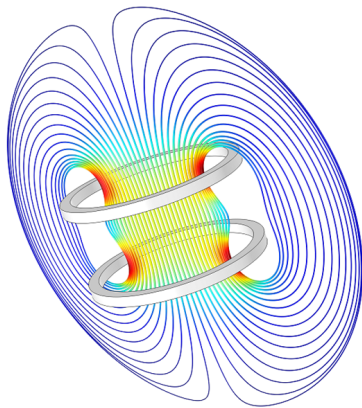
Les sources de champs magnétiques sont les courants électriques (équation de Maxwell-Ampère), et les aimants via les moments magnétiques atomiques assimilables à de petites boucles de courants.

## 5.1. Sources de champ magnétique

**Les lignes de champ magnétiques sont toujours fermées.**



Aimant permanent

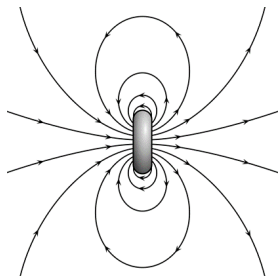


Bobines parcourues par un courant

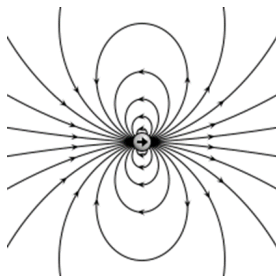
## 5.1. Sources de champ magnétique

### Les sources de champs magnétique sont

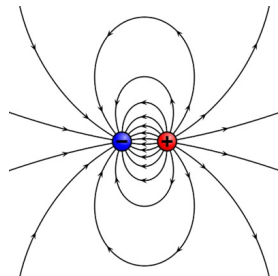
- les courants électriques (Maxwell-Ampère);
- les aimants via les moments magnétiques atomiques assimilables à de petites boucles de courants.



Dipôle Magnétique



Champ dipolaire



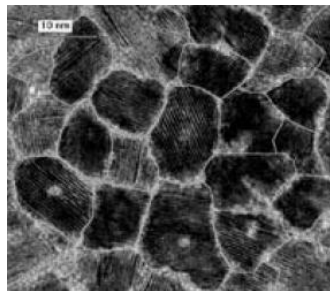
Dipôle électrique

## 5.1. Sources de champ magnétique

Application aux disques durs.



[https://en.wikipedia.org/wiki/Hard\\_disk\\_drive\\_platter](https://en.wikipedia.org/wiki/Hard_disk_drive_platter)



<https://volga.eng.yale.edu/teaching-resources/hard-drives/methods-and-materials>

## 5.1. Sources de champ magnétique

Application aux disques durs.

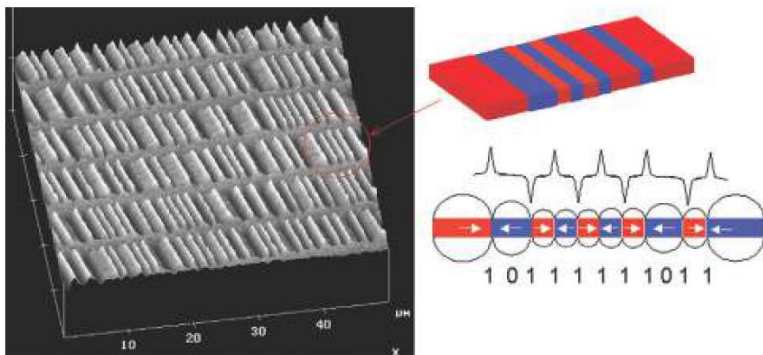


Fig. 1 A magnetic force micrograph of a disk media recorded in a commercial HDD. The peaks and valleys represent the magnetic flux generated from north- and south-pole transitions, respectively. A transition in the medium represents a '1' bit, while a missing transition represents a '0' bit.

*New heights for hard disk drives, J.-G. Zhu, Materials Today (2003)*



# 5.1. Sources de champ magnétique

Application aux disques durs.

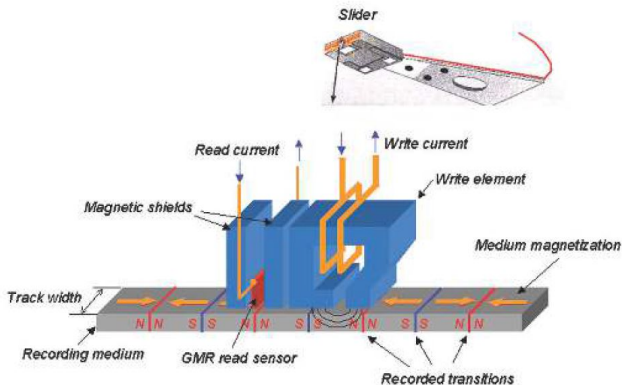


Fig. 2 Longitudinal recording scheme used in current HDDs. The recording head consists of an inductive write element and a giant magnetoresistive read element. The stray field generated at the write element gap magnetizes the medium along the recording track.

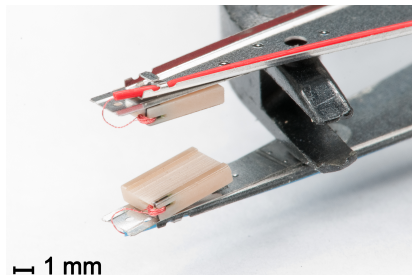
New heights for hard disk drives, J.-G. Zhu, Materials Today (2003)

## 5.1. Sources de champ magnétique

Application aux disques durs.



[https://en.wikipedia.org/wiki/Hard\\_disk\\_drive\\_platter](https://en.wikipedia.org/wiki/Hard_disk_drive_platter)



[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ReadWrite\\_Head\\_of\\_SyQuest\\_SQ3270S.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ReadWrite_Head_of_SyQuest_SQ3270S.jpg)

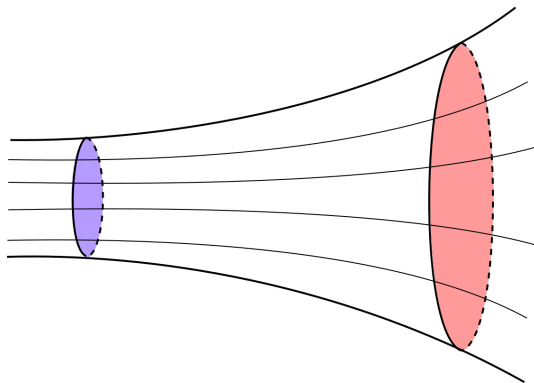
# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique**
  - Sources de champ magnétique
  - Conservation du flux magnétique**
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique

## 5.2. Conservation du flux magnétique

**Le champ magnétique est à flux conservatif.**

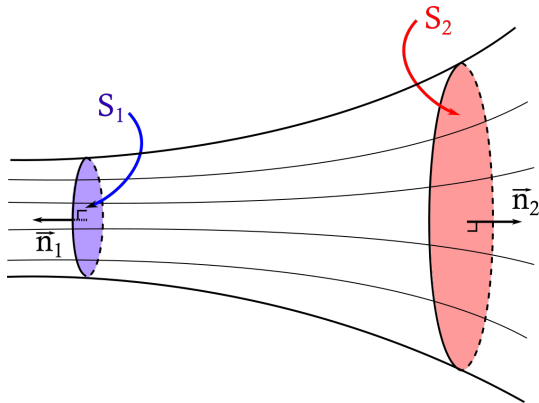
On considère un tube de champ délimité par une surface entrante  $S_1$  et une surface sortante  $S_2$ . On forme ainsi une surface fermée  $\Sigma$ , délimitant un volume  $V$ .



## 5.2. Conservation du flux magnétique

**Le champ magnétique est à flux conservatif.**

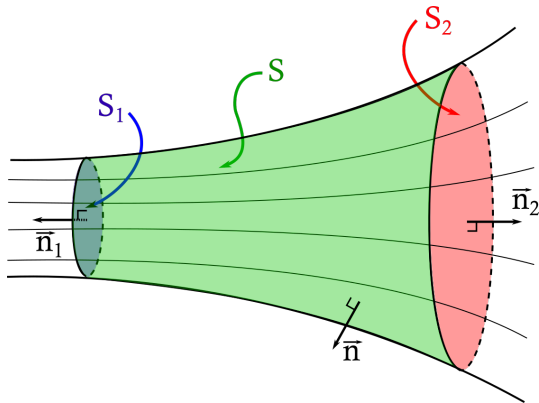
On considère un tube de champ délimité par une surface entrante  $S_1$  et une surface sortante  $S_2$ . On forme ainsi une surface fermée  $\Sigma$ , délimitant un volume  $V$ .



## 5.2. Conservation du flux magnétique

**Le champ magnétique est à flux conservatif.**

On considère un tube de champ délimité par une surface entrante  $S_1$  et une surface sortante  $S_2$ . On forme ainsi une surface fermée  $\Sigma$ , délimitant un volume  $V$ .



## 5.2. Conservation du flux magnétique

Structurellement, le champ magnétique est à flux conservatif ( $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ), donc

$$\phi_{S_1} = \phi_{S_2},$$

où  $\phi_{S_i}$  est le flux de champ magnétique à travers la surface  $i$  orientée de gauche à droite

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

**Conséquence** : si  $S_1 < S_2$ , alors  $B_1 > B_2$ . Et enfin,

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \vec{A} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A},$$

car  $\operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) = 0$ . On appelle  $\vec{A}$  le **potentiel vecteur**.

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique**
  - Loi de Biot et Savard
  - Théorème d'Ampère



# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique**
  - Loi de Biot et Savard
  - Théorème d'Ampère

## 6.1. Loi de Biot et Savard

On a l'équation aux sources de Maxwell-Ampère

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

**En statique**,  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  relie le champ magnétique aux courants.

On peut alors démontrer les lois de Biot et Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d^3 r',$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^2} d^3 r'.$$

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique**
  - Loi de Biot et Savard
  - Théorème d'Ampère**

## 6.2. Théorème d'Ampère

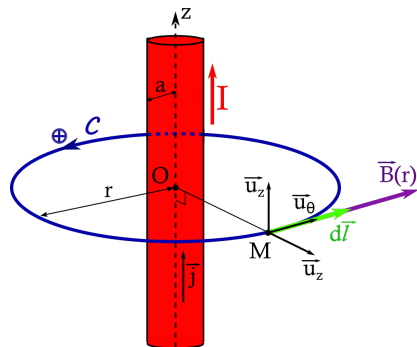
**En statique**,  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  : on applique le théorème de Stokes à  $\vec{B}$ .

On obtient alors le **théorème d'Ampère** :

La circulation de  $\vec{B}$  sur  $\mathcal{C}$  est égal à  $\mu_0 I$ , où  $I$  est le courant traversant la surface délimitée par  $\mathcal{C}$  et dont l'orientation fixe son signe.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} .$$

## 6.2. Théorème d'Ampère



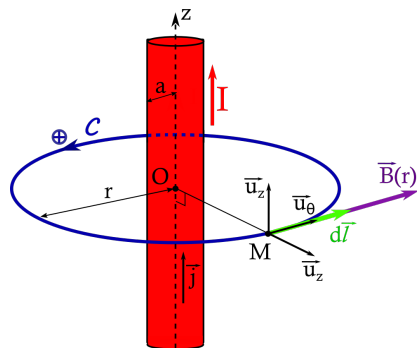
### Applications du théorème d'Ampère :

Champ magnétique généré par un fil cylindrique infini de rayon  $a$ , parcouru par un courant  $I$ .

On suppose que le vecteur densité volumique de courant est uniforme dans le fil, tel que

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z.$$

## 6.2. Théorème d'Ampère



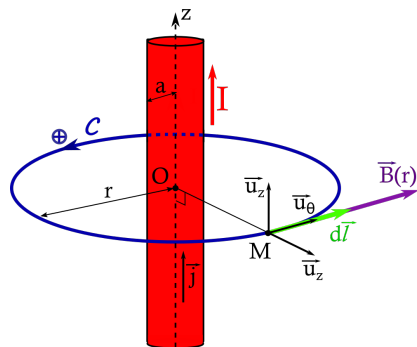
### Exploitation des symétries

Tout plan passant par  $M$  et l'axe du fil ( $Oz$ ) est un plan de symétrie  $\Pi$  de la distribution de courant. Donc c'est un plan d'antisymétrie du champ magnétique et donc  $M \in \Pi$  implique que  $\vec{B} \perp \Pi$  soit

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta.$$

Le champ magnétique est dit *orthoradial*.

## 6.2. Théorème d'Ampère

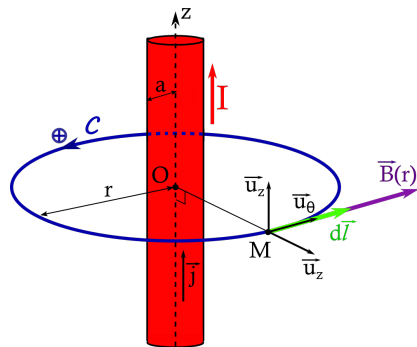


### Exploitation des invariances

Invariance par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) et invariance par translation selon  $z$

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta.$$

## 6.2. Théorème d'Ampère



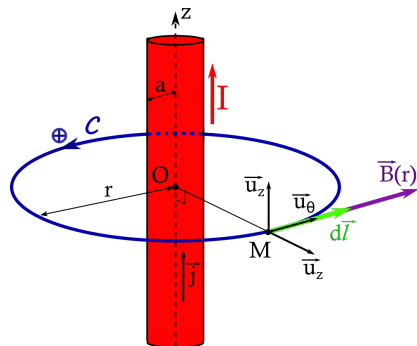
**Théorème d'Ampère** appliqué sur le contour  $\mathcal{C}$  formée par un cercle de rayon  $r$ , de centre appartenant à l'axe  $(Oz)$ , à la même altitude  $z$  que le point  $M$  où l'on souhaite calculer le champ magnétique.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r).$$

car sur  $\mathcal{C}$ ,  $r$  est constant donc  $B(r)$  également.



## 6.2. Théorème d'Ampère



### Théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r).$$

D'après le théorème d'Ampère

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I_\Sigma,$$

où  $I_\Sigma$  est le courant traversant la surface orientée  $\Sigma$  définie par le contour  $C$ .

## 6.2. Théorème d'Ampère

Si  $r \leq R$ :

$$I_{\Sigma} = j\pi r^2 = I \frac{r^2}{a^2},$$

donc

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{r}{a} \vec{u}_{\theta}.$$

Si  $r \geq R$ :

$$I_{\Sigma} = I,$$

donc

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_{\theta}.$$

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique
- 7 Approximation des régimes quasistationnaires (ARQS)

- Définition

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique
- 7 Approximation des régimes quasistationnaires (ARQS)

- Définition

## 7.1. Théorème d'Ampère

Les équations de Maxwell permettent de décrire tous les phénomènes électromagnétiques, y compris l'électronique. Cependant, en électronique au S1, nous avons introduit la notion d'*approximation des régimes quasistationnaires* (ARQS), où les temps de propagation des champs électromagnétiques étaient considérés comme négligables. En pratique, cela revient également à considérer que la vitesse de la lumière  $c \rightarrow +\infty$ .

## 7.1. Théorème d'Ampère

En pratique, considérons un circuit d'extension spatiale caractéristique  $L$ . La durée de propagation du champ électromagnétique au sein de ce circuit est typiquement de l'ordre de

$$\Delta t \sim \frac{L}{c}.$$

L'approximation des régimes quasistationnaires (ARQS) consiste à négliger ce retard  $\Delta t$  à la propagation du champ électromagnétique dans le circuit.

En électronique, en régime sinusoïdal, c'est l'ARQS qui permet de définir un courant  $I(t)$  dans un fil dont la valeur est identique en tout point de ce dernier par exemple.

## 7.1. Théorème d'Ampère

L'ARQS permet donc une simplification des problèmes pourvu que ce retard  $\Delta t$  soit négligeable. En régime sinusoïdale, il faut comparer ce retard à la période des signaux considérés  $T = 1/f$ , où  $f$  est la fréquence du signal. Ainsi, l'ARQS correspond aux régimes sinusoïdaux tels que  $T \gg \delta T$  soit  $1/f \gg L/c$ . En introduisant la longueur d'onde dans le vide  $\lambda = c/f$ , on obtient la condition suivante

$$\lambda \gg L.$$

Un circuit électronique d'extension  $L$  en régime variable de longueur d'onde  $\lambda$  vérifiera l'approximation des régimes quasistationnaires (ARQS) si et seulement si  $\lambda \gg L$ , où  $L$  est la taille caractéristique du dispositif.

## 7.1. Théorème d'Ampère

L'ARQS néglige les phénomènes ondulatoires et la propagation des ondes. En effet, nous verrons dans le chapitre 3 qu'une onde électromagnétique peut s'écrire de la forme suivante

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}),$$

avec  $\vec{k} \cdot \vec{r} \sim 2\pi \frac{r}{\lambda}$ . Donc si  $r \ll \lambda$ , c'est-à-dire dans l'ARQS, ce terme est négligeable dans la fonction cosinus et

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t),$$

et on retrouve le formalisme utilisé en électrocinétique. A contrario, tous les phénomènes ondulatoires ne pourront pas être décrits dans l'ARQS, en particulier les problèmes de rayonnement électromagnétique (antennes émettrices d'ondes électromagnétiques : WiFi, 5G, etc...).



## 7.1. Théorème d'Ampère

En pratique, l'ARQS correspond aux régimes de longueurs d'ondes grandes, c'est-à-dire de fréquences basses (car  $f = c/\lambda$ ). Pour l'étude d'un circuit d'extension spatiale donnée  $L$ , ce dernier pour être décrit dans le cadre de l'ARQS tant que les fréquences d'étude seront suffisamment faibles. Pour un circuit électronique typique en application courante, nous avons typiquement  $L$  10 à 30 cm. Ainsi, pour des fréquences  $f \ll 1$  GHz, il est possible de décrire leur comportement dans le cadre de l'ARQS. Le domaine des hyperfréquences ( $f > 1$  GHz) devient alors plus délicat à traiter, incluant les fréquences WiFi (2.56 GHz) et 5G (3,5 GHz et 26 GHz). Cependant, les composants utilisés sont plus petits, inférieurs au centimètre, permettant toujours d'appliquer ces résultats. En revanche, tout problème ondulatoire ou nécessitant la description d'un phénomène de propagation sur des distances supérieures à la longueur d'onde ne peuvent être décrits dans le cadre de l'ARQS.

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique
- 7 Approximation des régimes quasistationnaires (ARQS)**

- Définition

## 7.2. Théorème d'Ampère

L'ARQS revient à considérer que la vitesse de la lumière "tend vers l'infini". Or l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

or  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$  donc cette équation peut s'écrire comme suit

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Le terme  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , appelé *courant de déplacement*, peut être négligé dans la limite où  $c \rightarrow +\infty$ .

## 7.2. Théorème d'Ampère

Ainsi, dans l'ARQS, on néglige ce courant de déplacement et les équations de Maxwell deviennent

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (8)$$

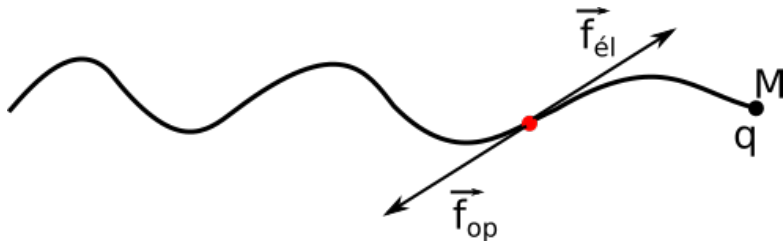
**Conséquence importante :** l'équation de Maxwell-Ampère dans l'ARQS est équivalente à une description magnétostatique du champ magnétique. Ainsi, **le théorème d'Ampère est aussi applicable dans l'ARQS et non pas seulement dans le cas de la magnétostatique.**

# Les équations de Maxwell

- 1 Introduction - rappels d'analyse vectorielle
- 2 Charge et courant
- 3 Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday
- 4 Maxwell-Gauss et électrostatique
- 5 Structure du champ magnétique
- 6 Maxwell-Ampère et magnétostatique
- 7 Approximation des régimes quasistationnaires (ARQS)

# Compléments : Energie électrostatique

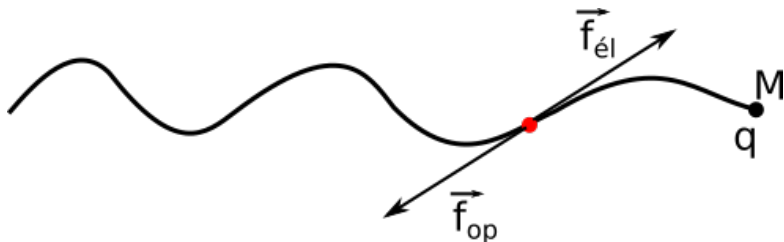
Calcul du travail d'un opérateur pour amener une charge  $q$  depuis l'infini en  $M$  au potentiel électrique  $V(M)$ .



On amène une charge  $q$  depuis l'infini (avec pour convention  $V(r \rightarrow +\infty) = 0$ ) jusqu'au point  $M$ . On considère que cette transformation est effectuée par un opérateur extérieur, qui à tout instant applique une force  $\vec{f}_{op}$  à la charge. Cette transformation est supposée quasistatique, donc  $\vec{f}_{op} = -\vec{f}_{el}$ .

# Compléments : Energie électrostatique

Calcul du travail d'un opérateur pour amener une charge  $q$  depuis l'infini en  $M$  au potentiel électrique  $V(M)$ .

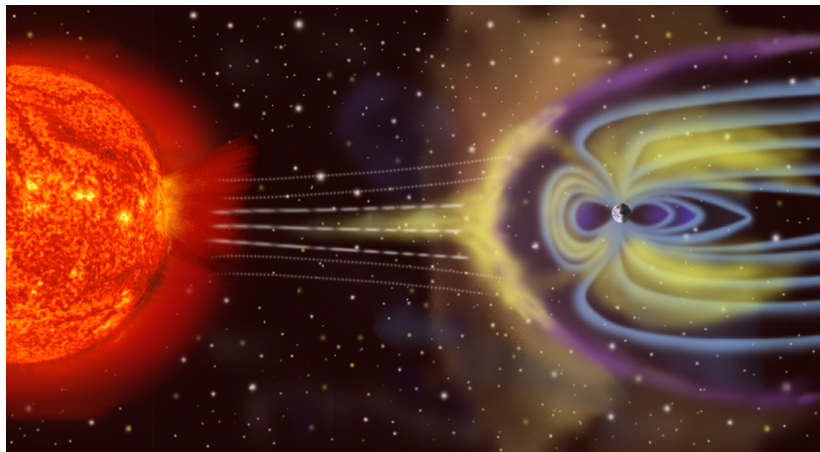


$$E_p(M) - E_p(\infty) = q [V(M) - V(\infty)] = qV(M),$$

où  $W_{op}$  est le travail de l'opérateur pour effectuer la transformation.  
On choisit arbitrairement  $E_p(\infty) = 0$  dans le potentiel  $V(\infty) = 0$ .  
On obtient ainsi l'énergie potentielle d'une charge  $q$  dans un potentiel électrique  $V$

$$E_p(M) = qV(M).$$

# Compléments : champ magnétique terrestre

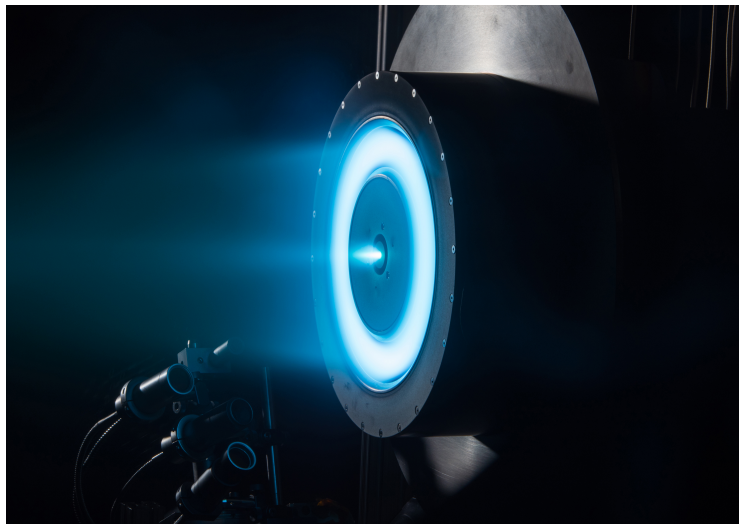


[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnetosphere\\_rendition.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnetosphere_rendition.jpg)

Référence : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Champ\\_magnétique\\_terrestre](https://fr.wikipedia.org/wiki/Champ_magnétique_terrestre).



# Compléments : propulsion électrostatique (SEP)



[https://www.nasa.gov/mission\\_pages/tm/sep/index.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/tm/sep/index.html)

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Pas de modification 4.0 International”.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>

