

Transformateurs électriques

1 Le transformateur électrique

Loi de réfraction appliquée au champ \mathbf{H} : l'analogie de l'indice optique est la perméabilité magnétique relative μ_r ($\mu_r \leftrightarrow \epsilon_r$). Une grande perméabilité relative permet de confiner le champ magnétique (analogie avec les fibres optiques à saut d'indice). Pour plus de précision, voir l'épreuve d'agrég A de la session 1991.

Rappel : Lien entre l'aimantation \mathbf{M} et l'excitation magnétique \mathbf{H} dans un milieu linéaire

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},$$

et l'excitation magnétique, le champ magnétique et l'aimantation sont liées par la relation

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

Démonstration du théorème d'Ampère dans les milieux magnétiques : L'aimantation \mathbf{M} prend son origine dans les courants "liés" $\mathbf{j}_l = \nabla \times \mathbf{M}$. L'équation de Maxwell-Ampère donne

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_l) = \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} + \mu_0 \mathbf{j},$$

pour obtenir

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j},$$

d'où l'introduction du vecteur \mathbf{H}

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j},$$

où \mathbf{j} est le courant libre. Ainsi, si on considère une surface Σ orientée, de contour \mathcal{C} . D'après le théorème de Green, on obtient

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{\Sigma} = I_{\Sigma},$$

où I_{Σ} est le courant traversant la surface Σ . C'est le théorème d'Ampère généralisé aux milieux magnétiques

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\Sigma}.$$

Dans un milieu linéaire, on a

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{M} + \mathbf{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H},$$

avec $\mu = \mu_0 \mu_r$, et $\mu_r = 1 + \chi_m$.

2 Équations de fonctionnement

2.1 Hypothèses simplificatrices

Le milieu est linéaire, alors on a une relation de la forme

$$\mathbf{M} = \mathcal{O}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H},$$

où $\mathcal{O}_m(\mathbf{r})$ est un tenseur qui dépend de la position a priori. Si le milieu est supposé homogène, alors ce tenseur ne dépend plus de la position. Enfin, si le milieu est isotrope, alors le tenseur $\mathcal{O}_m = \chi_m \cdot \mathbb{1}$ est scalaire. On a alors

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{M}.$$

2.2 Questions

On néglige les pertes de flux. Soit ϕ_1 (resp. ϕ_2) le flux magnétique à travers une section du primaire (resp. secondaire). On note $\phi_{C_i} = n_i \phi_i$ le flux magnétique à travers le circuit C_i (il faut tenir compte du nombre de tours du bobinage). La loi de Faraday donne e_i la fem induite dans le bobinage i selon

$$e_i = -\frac{d\phi_{C_i}}{dt}.$$

Avec les conventions utilisées, on a $u_i = -e_i$ la tension aux bornes du primaire/secondaire. Par conservation du flux, $\phi_1 = \phi_2 = \phi_0$ soit

$$u_1 = n_1 \frac{d\phi_0}{dt} = \frac{n_1}{n_2} n_2 \frac{d\phi_0}{dt} = \frac{n_1}{n_2} u_2.$$

D'où le résultat

$$u_2 = m u_1.$$

On considère le contour \mathcal{C} formé par le cercle de centre coïncidant avec celui du tore, et de rayon le rayon moyen du tour, orienté dans le sens horaire. Par hypothèse de l'énoncé, \mathbf{H} est homogène dans le noyau de fer. En appliquant le théorème d'Ampère sur ce contour, on obtient

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = HL = n_1 i_1 + n_2 i_2,$$

or $L = 2\pi R$, soit

$$H = \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{2\pi R}.$$

Désormais, on note $\phi_H = H\Sigma$. Attention, le flux ϕ_0 est un flux de champ magnétique alors que ϕ_H est un flux de \mathbf{H} . On a $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$ donc $\phi_0 = \mu_0 \mu_r \phi_H$, d'où le résultat

$$\phi_0 = \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{2\pi R} \mu_0 \mu_r \Sigma. \quad (1)$$

D'après la loi de Faraday établie précédemment, on a

$$u_1 = n_1 \frac{d\phi_0}{dt} = \frac{\mu_0 \mu_r \Sigma}{2\pi R} \left(n_1^2 \frac{di_1}{dt} + n_1 n_2 \frac{di_2}{dt} \right).$$

On obtient un résultat équivalent pour la tension u_2 . En introduisant la *réductance* \mathcal{R} définie selon

$$\mathcal{R} = \frac{2\pi R}{\mu_0 \mu_r \Sigma},$$

on obtient

$$u_1 = \frac{n_1^2}{\mathcal{R}} \frac{di_1}{dt} + \frac{n_1 n_2}{\mathcal{R}} \frac{di_2}{dt}, \quad (2)$$

$$u_2 = \frac{n_2 n_1}{\mathcal{R}} \frac{di_1}{dt} + \frac{n_2^2}{\mathcal{R}} \frac{di_2}{dt}. \quad (3)$$

Le terme croisé en $n_1 n_2 / \mathcal{R}$ traduit le couplage entre les deux circuits. La réductance ne dépend que de la géométrie et de la caractéristique du matériau constitutif du tore.

On a un couplage de la forme

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix}$$

où M est l'*inductance mutuelle* entre les deux circuits, et L est l'*inductance propre*. Dans ce cas, on montre trivialement que

$$\det \mathcal{M} = 0 = L_1 L_2 - M^2,$$

égalité caractéristique d'une influence totale entre les deux circuits, ce qui est logique compte tenu des hypothèses de l'énoncé (pas de pertes de flux).

Interlude technique facultatif : notion de réductance Le résultat précédent peut être généralisé à N circuits. On définit

$$\phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Sigma} = B\Sigma,$$

et $B = \mu_0 \mu_r H$, avec $\mu_r \sim 100 \rightarrow 10^6$ typiquement. Le théorème d'Ampère appliqué aux N circuits $\{i\}$ donne

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_j N_j I_j.$$

En électronique, on a les relations suivantes :

$$I = \iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \int \mathbf{E} d\mathbf{l} = \sum_j e_j,$$

ce qui donne les relations suivantes

$$\int \mathbf{j} \frac{d\mathbf{l}}{\sigma} = \sum_i e_i \Rightarrow I \underbrace{\left(\int \frac{d\mathbf{l}}{\sigma \Sigma} \right)}_{=\mathcal{R}} = \sum_j e_j.$$

Par analogie, dans un circuit magnétique, on a

$$\int \frac{B}{\mu} d\mathbf{l} = \sum_j N_j I_j,$$

d'où

$$\phi \underbrace{\left(\int \frac{d\mathbf{l}}{\mu S} \right)}_{=\mathcal{R}} = \sum_j N_j I_j,$$

et on définit, par analogie avec la résistance en électronique, la *réductance*, une caractéristique de la géométrie et des matériaux utilisés selon

$$\mathcal{R} = \int \frac{d\mathbf{l}}{\mu S}.$$

3 Le transformateur parfait

Si on considère que $\mu_r \rightarrow +\infty$ mais que ϕ reste fini, alors nécessairement l'équation (1) ne sera valable que si $(n_1 i_1 + n_2 i_2) \rightarrow 0$. On a alors la relation suivante de transformation des courants

$$-\frac{i_2}{i_1} = \frac{1}{m}.$$

La puissance instantanée dans le primaire est $\mathcal{P}_1 = u_1 i_1$ et dans le secondaire $\mathcal{P}_2 = u_2 i_2 = (u_2/m) \cdot (m i_2) = -u_1 i_1 = -\mathcal{P}_1$. Donc le rendement est de 100% ($\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = 0$ avec les conventions de signes choisies). C'est logique, puisque tous les phénomènes dissipatifs et les pertes de flux ont été négligés.

Si une impédance Z_2 est connectée, on a alors $u_2 = -Z_2 i_2$. Or $u_1 = u_2/m = -Z_2 i_2/m = Z_2 i_1/m^2$. Donc, vu du primaire, on a une impédance équivalente $Z'_2 = u_1/i_1$ soit

$$Z'_2 = \frac{Z_2}{m^2}.$$

Applications aux problèmes d'adaptation d'impédance (lignes HT, etc...).

Pour une charge résistive, la puissance transférée à la charge sera maximale quand cette dernière vaut la valeur de la résistance interne du générateur. Ainsi, en tenant compte du rapport de transformation, cette situation sera réalisée si

$$\frac{R}{m^2} = r.$$

4 Le transformateur réel

4.1 Perméabilité du matériau (modèle linéaire)

Si le secondaire est ouvert, alors $i_2 = 0$. On obtient alors immédiatement le *courant magnétisant au primaire* $i_1^{(0)}$

$$i_1^{(0)} = \frac{2\pi \mathcal{R}}{n_1 \mu_0 \mu_r \Sigma} \phi,$$

Alors, les équations couplées (3)

$$\begin{cases} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M i_2 \\ u_2 &= M i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

deviennent, compte tenu que $i_2 = 0$,

$$\begin{cases} u_1^{(0)} &= L_1 \frac{di_1^{(0)}}{dt} \\ u_2 &= M i_1^{(0)} \end{cases}$$

Le schéma équivalent du transformateur secondaire ouvert est donc une inductance L_1 . Les autres sources de pertes proviennent des résistances des bobinages, que l'on peut modéliser par une résistance en série r_1 au primaire, et une résistance r_2 au secondaire. De plus, les lois d'influences totales ne sont pas vérifiées : il y a des fuites de flux magnétique. Ces dernières peuvent être modélisées par des bobines supplémentaires en série "prenant" le flux perdu, d'inductance L_{f1} . On a alors la loi de Faraday au primaire

$$e_1 = -n_1 \frac{d\phi}{dt} + L_{f1} \frac{di_1}{dt}.$$

De même, au secondaire, on peut modéliser les pertes de flux par une inductance L_{f2} en série.

Remarque : pour minimiser les pertes de flux, en pratique, les deux bobinages sont réalisés l'un sur l'autre.

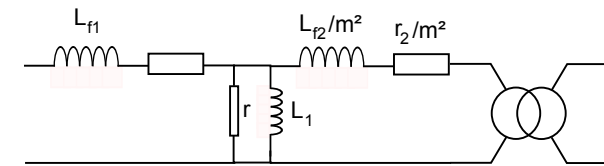
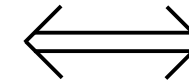
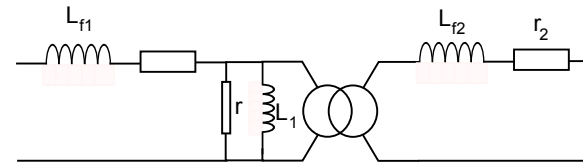


Figure 1: Modélisation du transformateur réel et impédance équivalente au primaire.

4.2 Non-linéarité

Un milieu ferromagnétique va pouvoir être approximé comme un milieu linéaire si $H \ll H_c$ où H_c est l'excitation coercitive du ferromagnétique. Au-delà de cette approximation linéaire, l'hystérésis dans le milieu va introduire des pertes énergétiques (orientation

des domaines, voir leçon sur le ferromagnétisme et BFR IV). Pour les minimiser, des matériaux doux sont employés. Il y a également des pertes par courants de Foucault, minimisées en utilisant des feuilletés et des ferrites (isolantes). Ces deux pertes sont grossièrement modélisables par une résistance r en parallèle.

5 Détermination expérimentale des pertes

6 Quelques compléments

6.1 Quand peut-on négliger les résistances des bobinages ?

On travaille à la pulsation ω . Il faut donc que $L\omega \gg r_1$. Or r_1 provient du bobinage et donc

$$r_1 \sim \frac{\ell}{\sigma \Sigma} = \frac{\ell_0 n_1}{\sigma \Sigma} \sim (10^{-3} \Omega) \cdot n_1,$$

et, à partir de l'équation (3), on a à 50 Hz

$$L\omega \sim (3 \cdot 10^{-2} \Omega) n_1^2.$$

Donc $L \propto n_1^2$ et $r_1 \propto n_1$. Si les bobines sont bien conçues, la partie inductive domine.

Remarque : comme $L \propto n^2$, l'impédance augmente quadratiquement avec n . Ainsi, pour saturer le fer d'un transformateur en TP, il peut être préférable de diminuer le nombre de tours au primaire, contrairement à l'intuition (voir TP milieux magnétiques).

6.2 Quand est-ce que l'approximation de perméabilité infinie est valable ?

On a

$$\phi = \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{\mathcal{R}}, \quad u_1 = n_1 \frac{d\phi}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = n_2 \frac{d\phi}{dt},$$

Si u_1 est fixé (tension du secteur au primaire par exemple) alors le flux ϕ est fixé. Quand le secondaire est ouvert, $i_2 = 0$ et $\phi = n_1 i_1^{(0)} / \mathcal{R}$. Donc, comme le flux est constant fixé par u_1 , indépendamment du secondaire, on a

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = n_1 i_1^{(0)},$$

d'où le courant i_2 dans le cas général

$$i_2 = -\frac{n_1}{n_2} (i_1 - i_1^{(0)}).$$

Peut-on négliger le courant magnétisant $i_1^{(0)}$? On a

$$i_1^{(0)} \approx \frac{u_1}{jL_1\omega} \rightarrow |i_1^{(0)}| = \frac{|u_1| \mathcal{R}}{n_1^2 \omega},$$

Au final, on obtient la loi d'échelle suivante

$$|i_1^{(0)}| \propto \frac{1}{\mu_r n_1^2}.$$

En pratique, μ et n_1 sont grands pour avoir de petits courants de magnétisation $i_1^{(0)}$.

6.3 Influence de la non-linéarité du noyau

Si on tient compte de la non linéarité du noyau : si u_1 la tension au primaire est sinusoïdale, u_2 l'est forcément car est lié au flux. Donc i_2 est sinusoïdale si la charge au secondaire est linéaire. La non-linéarité va donc se répercuter uniquement sur le courant au primaire i_1 .

Il y a donc une distorsion du courant au primaire, importante proche de la saturation.

6.4 Pourquoi faut-il réduire le nombre de spires au primaire pour voir la saturation (Cf. TP) ?

On a

$$H_1 \propto n_1 I_1,$$

et

$$I_1 = \frac{u_1}{L_1} = \frac{\mathcal{R} u_1}{n_1^2},$$

donc

$$H_1 \propto \frac{1}{n_1}.$$

This work is licensed under a Creative Commons "Attribution-NonCommercial-NoDerivatives" license.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>