# Résonance Magnétique Nucléaire

## I.
EXTRAIT AGREG B 2010

**PARTIE III**

**Spectroscopie par résonance magnétique nucléaire**

## III-A Obtention d'un signal RMN dans un circuit d'antenne

**III-A.1)a)** Bobines supraconductrices : résistance "nulle" et donc permettent d'utiliser des courants plus fort, *i.e.* des champs magnétiques plus élevés.

**III-A.1)b)** Pour les RMN médicales, les champs sont de l'ordre du Tesla.

### III-A.2 Effet gyroscopique

**III-A.2.1)** Par symétrie, la résultante des forces de Laplace est nulle.

**III-A.2.2)** L'équilibre est stable si $E_p$ est minimal, *i.e.* $\vec{M}$ est aligné avec $\vec{B}_0$.

**III-A.2.3)a)** Si $\left|\vec{M}\right|$ =C$^{te}$, alors

$$\frac{d\left|\vec{M}\right|}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\left|\vec{M}\right|^2}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{M}\cdot\frac{d\vec{M}}{dt} = 0.$$

Or

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \gamma\vec{\Gamma} = \gamma\vec{M}\times\vec{B},$$

donc

$$\vec{M}\cdot\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma\vec{M}\left(\vec{M}\times\vec{B}\right) = 0.$$

Donc $\frac{d\left|\vec{M}\right|}{dt} = 0$, et donc $\boxed{\left|\vec{M}\right| \text{ est une constante du mouvement}}$.

**III-A.2.3)b)**

$$\frac{dM_z}{dt} = \vec{u}_z\cdot\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma\vec{u}_z\cdot\vec{\Gamma} = \gamma\vec{u}_z\cdot\left(\vec{M}\times\vec{B}\right) = 0.$$

Donc

$$\boxed{\frac{dM_z}{dt} = 0}.$$

**III-A.2.3)c)** On a $\vec{M}\cdot\vec{B}_0 = \left|\vec{M}\right| B_0\cos\theta$. Donc, étant donné que $\left|\vec{M}\right|$ et $B_0$ sont constants, on a

$$\frac{d\left(\vec{M}\cdot\vec{B}_0\right)}{dt} = \left|\vec{M}\right| B_0\frac{d}{dt}\left(\cos\theta\right).$$

Or, $\vec{M}\cdot\vec{B}_0 = B_0 M_z$ et $M_z$ est une constante du mouvement. On en déduit que

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = 0.$$

D'où, $\boxed{\theta \text{ est constant au cours du temps}}$.

**III-A.2.3)d)** On considère le point décrit par le vecteur $\vec{M}$. $\left|\vec{M}\right|$ est constant, donc ce point se trouve sur une sphère de rayon $\left|\vec{M}\right|$. $M_z$ est constant : ce point se trouve donc également sur un plan perpendiculaire à $\vec{u}_z$, distant de $M_z$ à $O$. Ces deux surfaces ont un domaine commun formé par un cercle. Géométriquement, le rayon de ce cercle est

$$\boxed{r = \left|\vec{M}\right|\sin\theta}.$$

**III-A.2.4)** On pose $\underline{M} = M_x + jM_y$. Les équation du mouvement sont

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma\vec{M}\times\vec{B}_0,$$

soit, en projection sur $x$ et $y$,

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma B_0 M_y \quad \text{et} \quad \frac{dM_y}{dt} = -\gamma B_0 M_x.$$

On obtient alors

$$\boxed{\frac{d\underline{M}}{dt} = -j\gamma B_0 \underline{M}},$$

que l'on résoud pour obtenir $\underline{M}(t) = Ae^{j(\gamma B_0 t+\alpha)}$. Avec les notations de l'énoncé, cela devient

$$\boxed{\underline{M}(t) = Ae^{j(-\omega_0 t+\alpha)}},$$

avec $A$ et $\alpha$ des constantes d'intégration. Interprétation : on a une précession de $\vec{M}$ à la pulsation $\omega_0$.

**III-A.2.5)**

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\gamma B_0}{2\pi} = 200 \text{ MHz}.$$

**III-A.3 Etude du phénomène d'aimantation paramagnétique associée aux noyaux**

**III-A.3.1)**

$$\Delta E = +\frac{\hbar}{2}\gamma B_0 - \left(-\frac{\hbar}{2}\gamma B_0\right) = \hbar\gamma B_0 = \hbar\omega_0.$$

La pulsation de la transition radiative correspond à la pulsation de Larmor.

**III-A.3.2)** Loi statistique de Boltzmann : à l'équilibre thermique à $T$, la probabilité d'être dans un état d'énergie $E$ est proportionnel à $e^{-\beta E}$ avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Donc

$$N^+ = A\exp\left(+\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right) \text{ et } N^- = A\exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right),$$

d'où

$$\boxed{\frac{N^+}{N^-} = \exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}\right)}.$$

Cas limites :

- $T \to 0$ K, tous les spins s'alignent, $\frac{N^+}{N^-} \to +\infty$,
- $T \to +\infty$, mélange équiprobable, $\frac{N^+}{N^-} \to 1$,

**III-A.3.4)** A l'équilibre thermodynamique, la statistique de Maxwell-Boltzmann s'applique. On a

$$N = N^+ + N^- = A\left(\exp\left(+\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)\right) = 2A\cosh\left(\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right).$$

Donc

$$\boxed{A = \frac{N}{2\cosh\left(\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)}}.$$

Or, $\vec{M} = N^+\left(+\frac{\hbar}{2}\gamma\vec{u}_z\right) + N^-\left(-\frac{\hbar}{2}\gamma\vec{u}_z\right)$. En utilisant les expressions de $A$, $N^+$ et $N^-$, on obtient

$$\boxed{\vec{M} = N\gamma\frac{\hbar}{2}\tanh\left(\frac{x'}{2}\right)\vec{u}_z} \text{ avec } \boxed{x' = \beta\hbar\omega_0}.$$

**III-A.3.5)a)**

$$\boxed{x' = 2\cdot 10^{-4} \ll 1}.$$

**III-A.3.5)b)** On peut faire un DL $\tanh(x'/2) \approx x'/2$ soit

$$\boxed{\vec{M}_0 = N\gamma\frac{\hbar^2\omega_0}{4k_B T}\vec{u}_z}.$$

**III-A.3.6)** On a $M_0 \propto \gamma^2$, $M_0 \propto B_0$ et $M_0 \propto 1/T$. On aura une aimantation importante pour un champ important, et une faible température. On a une compétition entre l'énergie thermique et l'énergie d'aimantation. L'aimantation est proportionnelle au champ, c'est une substance paramagnétique.

**III-A.3.7)** Non, à l'équilibre, $\vec{M}_0$ est aligné avec $\vec{B}_0$ donc ne précesse pas.

### III-A.4. Prise en compte de la relaxation dans l'étude de la résonance magnétique

**III-A.4.1)** Appliquons le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{\omega}_0 \times \vec{M} + \frac{\vec{M}_0 - M_z\vec{u}_z}{T_1} - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}, \qquad (1)$$

qui donne, projeté sur $\vec{u}_z$,

$$\boxed{\frac{dM_z}{dt} = \frac{M_0 - M_z}{T_1}}.$$

**III-A.4.2)** On a

$$\frac{dM_z}{dt} + \frac{M_z}{T_1} = \frac{M_0}{T_1},$$

soit $M_z(t) = M_0 + A\exp(-t/T_1)$. En tenant compte de $M_z(t=0) = 0$, donc

$$\boxed{M_z(t) = M_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)\right)}.$$

**III-A.4.3)** On pose $\vec{M} = M_z\vec{u}_z + \vec{M}_\perp$. Injecté dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} + \frac{dM_z}{dt}\vec{u}_z = \vec{\omega}_0 \times \vec{M} + \frac{M_0 - M_z}{T_1}\vec{u}_z - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}.$$

Or,

$$\frac{dM_z}{dt}\vec{u}_z = \frac{M_0 - M_z}{T_1}\vec{u}_z,$$

donc on obtient immédiatement

$$\boxed{\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} = -\left(\omega_0\vec{u}_z \times \vec{M}_\perp\right) - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}}.$$

**III-A.4.4)** On a $\vec{M}_1 = \vec{M}_\perp e^{t/T_2}$, et donc

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{M}_1}{dt} &= \left(\frac{d\vec{M}_\perp}{dt}\right)e^{t/T_2} + \frac{\vec{M}_1}{T_2},\\ &= -\omega_0\vec{u}_z \times \vec{M}_\perp e^{t/T_2}.\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\frac{d\vec{M}_1}{dt} = -\omega_0\vec{u}_z \times \vec{M}_1}.$$

**III-A.4.5)** De manière similaire à **III-A.2.4)**, on obtient

$$\frac{dM_{1x}}{dt} = \omega_0 M_{1y} \;\text{ et }\; \frac{dM_{1y}}{dt} = -\omega_0 M_{1x},$$

soit

$$\boxed{\frac{d\underline{M_1}}{dt} = -j\omega_0\underline{M_1}}.$$

**III-A.4.5)c)** On obtient immédiatement $\underline{M_1} = Ae^{-j\omega_0 t + j\varphi}$, où $A$ et $\varphi$ sont des constantes d'intégration. Conditions initiales : $\underline{M_1}(t=0) = -jM_0$ (car $M_x = 0$ et $M_y = -M_0$). Donc, finalement, on obtient

$$\boxed{\underline{M_1}(t) = -jM_0 e^{-j\omega_0 t}}.$$

**III-A.4.5)d)** On a $M_x = e^{-t/T_2}\mathrm{Re}\left(\underline{M_1}(t)\right)$ soit

$$\boxed{M_x(t) = -M_0\sin(\omega_0 t)\, e^{-t/T_2}}.$$

**III-A.4.6)** *Cf.* Electromagnétisme: dans l'ARQS, on néglige le temps de propagation. En pratique, $\lambda \gg D$, où $D$ est la taille caractéristique du circuit. A des fréquences de l'ordre de 200 MHz, $\lambda = c/\nu \sim 1.5$ m $\gg$ quelques dizaines de cm $\Rightarrow$ OK !

**III-A.4.7)** Phénomène d'induction électromagnétique.



kenneth.maussang@ens.fr

**III-A.4.8)** On a la loi de Faraday

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -k\frac{dM_x}{dt},$$

d'où

$$e(t) = +kM_0\omega_0 e^{-t/T_2}\left(\cos\omega_0 t - \underbrace{\frac{1}{\omega_0 T_2}\sin\omega_0 t}_{\text{2nd terme}}\right).$$

**III-A.4.9)** On a $\omega_0 T_2 \sim 6\cdot 10^8 \gg 1$, donc on peut négliger le second terme ; d'où

$$\boxed{e(t) \approx kM_0\omega_0 \cos\left(\omega_0 t\right) e^{-t/T_2}}.$$

**III-A.4.10)a)**

$$\boxed{e(t) \approx kN\gamma^3\frac{\hbar^2 B_0^2}{4k_B T}\cos\left(\gamma B_0 t\right) e^{-t/T_2}}.$$

**III-A.4.10)b)** Signal quadratique avec $B_0$ + pas d'effets de champs magnétiques parasites.