Résonance Magnétique Nucléaire

I.
EXTRAIT AGREG B 2010

Notations et données numériques :

Constante de Boltzmann : $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J·K^{-1},

Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34}$ J·s,

Charge élémentaire : $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C,

Masse du proton : $m_P = 1.673 \cdot 10^{-27}$ kg.

PARTIE III

Spectroscopie par résonance magnétique nucléaire

Dans toute la suite, (R_0) désigne le référentiel du laboratoire, assimilé à un référentiel galiléen. (Ox, Oy, Oz) est un système d'axes orthogonaux, fixes dans (R_0) ; la base associée, orthonormée directe, est notée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

On ne prendra pas en compte l'effet du champ de pesanteur.

Dans (R_0) chaque noyau possède, du fait de son spin, un moment cinétique intrinsèque noté ici $\vec{\sigma}$, et peut être assimilé à un dipôle magnétique de moment magnétique noté $\vec{M}$.

Pour chaque noyau, les moments cinétiques $\vec{\sigma}$ et magnétique $\vec{M}$ sont liés par la relation $\vec{M} = \gamma\vec{\sigma}$, dans laquelle γ désigne le rapport gyromagnétique du type de noyau étudié.

Les seuls noyaux étudiés dans ce problème sont les noyaux $^1_1$H, constitués d'un unique proton.

Dans ce cas, le rapport gyromagnétique vaut $\gamma = 2.675 \cdot 10^8$ rad·s^{-1}·T^{-1}.

III-A Obtention d'un signal RMN dans un circuit d'antenne

On considère un grand nombre N de protons soumis à un champ magnétique intense $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$ supposé uniforme et permanent dans (R_0).

En l'absence de précision contraire, les interactions entre noyaux ne seront pas prises en compte ; en particuliers, on négligera dans une première approche le champ magnétique qu'ils créent.

III-A.1)a) En quoi l'utilisation de bobines supraconductrices permet la création de champs magnétiques très intenses ?

III-A.1)b) Quel est l'ordre de grandeur de la valeur maximale de B_0 qu'on produit actuellement dans les appareils de résonance magnétique nucléaire (RMN) ?

III-A.2 Effet gyroscopique

On soumet un proton de moment magnétique $\vec{M} = \gamma\vec{\sigma}$, placé en O, à un champ magnétique uniforme et permanent dans (R_0) : $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$ $(B_0 > 0)$.

III-A.2.1) Si on assimile ce dipôle magnétique à une petite boucle fermée de courant, que peut-on dire de la résultante des forces magnétiques subies par ce dipôle ?

III-A.2.2) On rappelle l'expression de l'énergie potentielle du dipôle dans le champ $\vec{B}_0$: $E_P = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0$. En déduire quels doivent être la direction et le sens de $\vec{M}$ pour qu'il y ait équilibre stable.

Dans la suite, la direction de $\vec{M}$ est supposée a priori quelconque.

On rappelle l'expression de moment des actions exercées par un champ magnétique $\vec{B}$ sur un dipôle : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

Par ailleurs, le théorème du moment cinétique stipule que

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}}{\mathrm{d}t}\right)_{R_0} = \vec{\Gamma}.$$

III-A.2.3.a) Montrer que $\|\vec{M}\|$ est une constante.

III-A.2.3.b) Montrer que $M_z = \vec{M} \cdot \vec{u}_z$ est une constante.

III-A.2.3.c) En déduire la constante de l'angle θ entre $\vec{M}$ et $\vec{B}_0$ (θ est compris entre 0 et π).

III-A.2.3.d) Montrer que l'extrémité du vecteur $\vec{M}$ décrit un cercle d'axe Oz, et déterminer le rayon de ce cercle en fonction de $\|\vec{M}\|$ et de l'angle θ.

III-A.2.4) Montrer que le vecteur rotation $\vec{\omega}_0$ associé à la précession de $\vec{M}$ autour du champ $\vec{B}_0$ (donc au mouvement circulaire introduit ci-dessus) a pour expression littérale : $\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0$; on pourra, au besoin, écrire le système différentiel vérifié par les deux composantes $M_x = \vec{M} \cdot \vec{u}_x$ et $M_y = \vec{M} \cdot \vec{u}_y$, en déduire, par combinaison, équation différentielle vérifiée par la quantité $\underline{M} = M_x + jM_y$ (avec $j^2 = -1$) et montrer enfin que $\underline{M}$ peut s'écrire sous la forme $Ae^{j(-\omega_0 t+\alpha)}$, A et α étant deux constantes réelles d'intégration (avec $A > 0$).

Dans toute la suite, on posera $\vec{\omega}_0 = -\omega_0 \vec{u}_z$, où $\omega_0 = \gamma B_0$ est une constante positive, nommée vitesse angulaire (ou pulsation) de précession.

III-A.2.5) Calculer la valeur de la fréquence de précession des protons $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ lorsque $B_0 = 4.70$ T.

III-A.3 Etude du phénomène d'aimantation paramagnétique associée aux noyaux

On rappelle que la composante σ_z du moment cinétique $\vec{\sigma}$ de spin du proton ne peut prendre que les valeurs $\pm\hbar/2$, $\hbar$ étant la constante de Planck réduite : $\hbar = h/2\pi$.

Cette composante σ_z et la composante M_z du moment magnétique du proton sont liées par la relation : $M_z = \gamma\sigma_z$.

L'étude porte sur un ensemble de protons identiques discernables, d'interactions mutuelles très faibles, soumis au champ $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ et peuplant, selon la loi statistique de Maxwell-Boltzmann correspondant à la température T, les 2 états correspondant aux deux valeurs possibles de σ_z.

On rappelle à nouveau l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique dans le champ $\vec{B}_0$: $E_P = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0$.

III-A.3.1.) Exprimer l'écart d'énergie entre les deux états de spins ; que remarque-t-on sur la pulsation d'une transition radiative entre ces deux états ?

On note N le nombre **total, très grand,** de protons étudiés, N^+ (respectivement N^-) celui des protons de σ_z égal à $\hbar/2$ (respectivement $-\hbar/2$).

III-A.3.2) Déterminer le quotient N^+/N^- en fonction des quantités B_0, γ, T, de $\hbar$, et de la constante de Boltzmann k_B.

III-A.3.3) En déduire les expressions des N^+ et de N^- en fonction de N et de $x' = \beta\gamma\hbar B_0$, avec $\beta = 1/k_B T$. Tester la pertinence de ces deux expressions dans deux cas limites.

Dans toute la suite, $\vec{M}$ désigne la somme des moments magnétiques des N protons, et $\vec{M}_0$ désigne désormais sa valeur à l'équilibre thermodynamique à la température T, en présence du champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$.

III-A.3.4) Montrer que $\vec{M}_0 = N\gamma\frac{\hbar}{2}\tanh\left(\frac{x'}{2}\right)\vec{u}_z$, où la notation "tanh" désigne la fonction tangente hyperbolique.

III-A.3.5)a) On donne $T = 300$ K et $B_0 = 4.70$ T. Evaluer numériquement la quantité x'.

III-A.3.5)b) Commenter ce résultat, et en déduire une expression <u>simplifiée</u> de $\vec{M}_0$ en fonction de N, γ, $\hbar$, x' et de $\vec{u}_z$, puis de N, γ, $\hbar$, B_0, k_B, T et $\vec{u}_z$; on rappelle que, lorsque $|\varepsilon| \ll 1$, $\tanh(\varepsilon) \sim \varepsilon$.

Dans toute la suite, seule cette expression <u>simplifiée</u> de $\vec{M}_0$ sera utilisée.

III-A.3.6)a) Comment $\vec{M}_0$ dépend-t-il de γ ?

III-A.3.6)b) Comment $\vec{M}_0$ dépend-t-il de B_0 ?

III-A.3.6)c) Comment $\vec{M}_0$ dépend-t-il de la température T ?

III-A.3.6)d) Commenter physiquement ces deux dernières réponses.

III-A.3.7) $\vec{M}_0$ est-il affecté par la précession décrite précédemment - dans la partie "effet gyroscopique" - autour du champ permanent $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$? Justifier.

III-A.4. Prise en compte de la relaxation dans l'étude de la résonance magnétique

On note $\vec{M}_0$ sous la forme $\vec{M}_0 = M_0\vec{u}_z$.

Partant de l'équilibre thermodynamique précédent, et grâce à une impulsion qui sera étudiée dans la partie III-C, on fait "basculer" rapidement le moment total $\vec{M}$ sur une direction du plan xOy ; on admet que, lors de ce basculement, la norme de $\vec{M}$ est conservée.

On suppose pour simplifier l'étude ultérieure, qu'à la date $t = 0$, **juste après l'impulsion**, le moment $\vec{M}$ vaut : $\vec{M}(t=0) = -M_0\vec{u}_y$, valeur qu'on veillera à ne pas confondre avec $\vec{M}_0 = M_0\vec{u}_z$.

Lorsque $\vec{M}(t)$ diffère, à un instant t, de la valeur d'équilibre $\vec{M}_0 = M_0\vec{u}_z$, $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}\right)_{R_0}$ est la somme de deux contributions :

- l'une déjà mentionnée qui vaut, après l'impulsion, $\omega_0 \wedge \vec{M}$ avec $\vec{\omega}_0 = -\gamma\vec{B}_0 = -\omega_0\vec{u}_z$;
- l'autre, due aux phénomènes de relaxation, dont l'expression est :

$$\frac{\vec{M}_0 - M_z\vec{u}_z}{T_1} - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2};$$

$M_z\vec{u}_z$ et $\vec{M}_\perp$ représentent ici les composantes de $\vec{M}$ respectivement parallèle et orthogonale à l'axe Oz, tandis que T_1 et T_2 désignent les constantes de temps des relaxations respectivement longitudinale et transversale.

III-A.4.1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $M_z(t)$.

III-A.4.2) Résoudre cette équation différentielle, sachant qu'à la date $t = 0$, juste après l'impulsion, le moment $\vec{M}$ vaut : $-M_0\vec{u}_y$.

III-A.4.3) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la composante $\vec{M}_\perp$ s'écrit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{M}_\perp}{\mathrm{d}t}\right)_{R_0} = -\left(\omega_0\vec{u}_z \wedge \vec{M}_\perp\right) - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}.$$

III-A.4.4) On pose : $\vec{M}_1 = \vec{M}_\perp(t)e^{+t/T_2}$. Montrer que

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{M}_1}{\mathrm{d}t}\right)_{R_0} = -\left(\omega_0\vec{u}_z \wedge \vec{M}_1\right).$$

III-A.4.5)a) Ecrire le système différentiel vérifié par les deux composantes $M_{1x} = \vec{M}_1 \cdot \vec{u}_x$ et $M_{1y} = \vec{M}_1 \cdot \vec{u}_y$.

III-A.4.5)b) En déduire, par combinaison, l'équation différentielle vérifiée par la quantité $\underline{M_1} = M_{1x} + jM_{1y}$ (avec $j^2 = -1$).

III-A.4.5)c) En tenant compte des conditions initiales, montrer que $\underline{M_1} = -jM_0e^{j(-\omega_0 t)}$.

III-A.4.5)d) En déduire M_1 et montrer que $M_x = -M_0\sin(\omega_0 t)\,e^{-t/T_2}$.

On suppose que tous les protons de l'échantillon étudié se trouvent sur l'axe d'une bobine (souvent nommée "antenne") fixe dans (R_0). L'axe orienté de la bobine est supposé confondu avec l'axe Ox. Cette bobine est un des éléments d'un circuit série (dit "de détection"), également fixe dans (R_0), et dont l'étude est détaillée plus loin, à la question III-A.5).

On admet que, dans ces conditions, le flux du champ magnétique créé par les N protons à travers l'ensemble des spires orientées de la bobine est donné par la relation : $\Phi_{\mathrm{prot}\to\mathrm{bob}} = k \cdot M_x$, dans laquelle k est une constante positive dont la valeur ne dépend que de la géométrie de l'échantillon étudié, de celle de la bobine, et de leur disposition relative.

Dans toute la suite, la constante k est supposée connue.

III-A.4.6) On admet que les dimensions du circuit de détection sont inférieures au décimètre. La fréquence de précession f_0 étant voisine de 200 MHz, les conditions de validité de l'approximation des états quasi-stationnaire sont-elles remplies pour ce circuit ?

III-A.4.7) On rappelle que $M_x = -M_0 \sin(\omega_0 t)\, e^{-t/T_2}$. Du fait de la variation de M_x au cours du temps, $\Phi_{\text{prot}\to\text{bob}} = k \cdot M_x$ dépend du temps et une force électromotrice apparaît dans le circuit orienté de la bobine. A quel phénomène physique correspond cette force électromotrice, notée $e(t)$ dans la suite ?

III-A.4.8) Déterminer $e(t)$ en fonction de k, M_0, ω_0, T_2 et de t.

En pratique, $f_0 = \omega_0/2\pi$ est de l'ordre de la centaine de mégahertz, et T_2 est de l'ordre de la seconde.

III-A.4.9) Montrer que dans ces conditions, on peut considérer que $e(t)$ obéit à la relation

$$e(t) = kM_0\omega_0 \cos(\omega_0 t)\, e^{-t/T_2};$$

cette relation sera retenue dans toute la suite.

III-A.4.10)a) Déduire de ce résultat, en remplaçant ω_0 par sa valeur et M_0 par son expression simplifiée trouvée à la question III-A.3.5., la façon dont l'amplitude de $e(t)$ dépend de la valeur de B_0 et de celle de γ.

III-A.4.10)b) Quel est l'intérêt d'opérer avec des valeurs importantes de B_0 ?