★ TD7 Le problème à deux corps (facultatif) ★

Données :
Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$
Masse de la Terre : $M_T = 6.00 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Rayon de la Terre : $R_T = 6400\,\mathrm{km}$

1 Étude générale du problème à deux corps

On considère un système isolé de deux points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 en interaction. On note $\vec{f}_{1\to 2}$ la force exercée par M_1 sur M_2. D'après le principe d'action-réaction, $\vec{f}_{2\to 1} = -\vec{f}_{1\to 2}$ est la force exercée sur M_1 par M_2. On note G le barycentre et $\mathcal{R}^*$ le référentiel de centre de masse associé. On étudie le mouvement de ces points dans $\mathcal{R}$, référentiel supposé galiléen. Soit O un point fixe de $\mathcal{R}$. On note $\vec{r}_1 = \overrightarrow{\mathrm{OM}_1}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{\mathrm{OM}_2}$. Soit $U(\|\vec{r}\|)$ l'énergie potentielle d'interaction entre M_1 et M_2, où $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. On cherche à déterminer $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$.

1.1 Particule fictive

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacune des particules dans $\mathcal{R}$.

2. En déduire la loi d'évolution de G dans $\mathcal{R}$.

3. Montrer que le problème à deux corps peut se ramener à une équation différentielle sur $\vec{r}$. On fera apparaître la masse réduite μ dont on précisera l'expression.

4. Interpréter cette équation en introduisant la notion de particule fictive M associée au système. On précisera sa position par rapport à G, sa masse et la force subit dans $\mathcal{R}^*$.

On se place désormais dans $\mathcal{R}^*$.

5. $\mathcal{R}^*$ est-il galiléen dans le cas général ? Quand est-il dans le cas présent ?

6. Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{OM}_1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}_2}$ en fonction de $\vec{r}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$. Donner l'expression de la quantité de mouvement $\vec{p}^*$, du moment cinétique $\vec{L}^*(G)$ en G et de l'énergie cinétique E_c^* de la particule fictive dans $\mathcal{R}^*$.

7. Une fois le mouvement de la particule fictive obtenue ($\vec{r}(t)$), comment résoudre complètement le problème (*i.e.* obtenir $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$) dans $\mathcal{R}$.

8. **Cas particulier important :** on envisage le cas où l'une des deux particules a une masse très supérieure à celle de l'autre, par exemple $m_1 \gg m_2$. Peut-on identifier la particule fictive à l'une des deux particules réelles ? Citer un exemple de problème que l'on résoud dans ce cadre là.

1.2 Moment cinétique

1. Déterminer le moment cinétique dans $\mathcal{R}^*$ par rapport à un point A quelconque. Montrer que $\vec{L}^*(A)$ est indépendant de A. On note $\vec{L}^*$ ce moment cinétique. Le comparer à celui de la particule fictive dans $\mathcal{R}^*$

2. On raisonne toujours dans $\mathcal{R}^*$. Montrer que

- $\vec{L}^*$ est conservé,
- la trajectoire de la particule fictive est plane.

Dans le plan de la trajectoire, orienté par le moment cinétique, on note (r, θ) les coordonnées polaires de $\overrightarrow{\mathrm{GM}}$.

3. Montrer que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante. Justifier le nom de constante des aires donnée à la grandeur $\frac{C}{2}$, en retrouvant la 2e loi de Képler.

1.3 Approche énergétique

1. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c^* du système constitué par les deux particules M_1 et M_2 dans $\mathcal{R}^*$. Montrer que cette expression est identique à celle obtenue pour la particule fictive dans $\mathcal{R}^*$. Exprimer E_c^* en coordonnées polaires et montrer que

$$E_c^* = \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}\right).$$

2. Écrire l'expression de l'énergie mécanique E_m du système.

3. L'expression de E_m établie précédemment peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r),$$

où $U_{\text{eff}}(r)$ est l'énergie potentielle d'interaction effective de la particule fictive.

Donner l'expression de $U_{\text{eff}}(r)$. Comment prévoir qualitativement la nature bornée ou non de la trajectoire de la particule fictive ?

4. Écrire deux relations intégrales donnant les évolutions de r et θ en fonction du temps.

5. Comment résoudre alors complètement le problème à deux corps ?

2 Cas d'une interaction newtonienne attractive (d'après CAPES 2002)

Nous entendons par interaction newtonienne, une force inversement proportionnelle au carré de la distance au centre de force, comme les interactions coulombiennes et gravitationnelles.

On souhaite ici étudier le mouvement d'un satellite dans le champ gravitationnel terrestre. Ce satellite est considéré comme un objet ponctuel de masse m_S. La Terre est assimilée à une répartition sphérique de masse. On va d'abord montrer que les résultats précédents, obtenus dans le cas de l'interaction de deux objets *ponctuels*, s'appliquent également dans ce cadre là. On obtiendra ensuite quelques résultats spécifiques aux mouvements de satellites artificiels terrestres.

1. Dans l'approximation d'une répartition de masse sphérique pour la Terre, donner l'expression du champ de gravitation terrestre $\vec{g}$ à une distance r ($r > R_T$) du centre de la Terre. Commentaires. On notera par la suite $g_0 = g(R_T)$.

2. Définir le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ que l'on supposera galiléen. Justifier le fait qu'on peut le confondre avec le référentiel barycentrique (ou référentiel de centre de masse) $\mathcal{R}^*$ du système {Terre-Satellite}. Avec quel sous-système se confond la particule fictive associée à l'ensemble {Terre-Satellite} ?

3. Donner l'expression de l'énergie potentielle $U(r)$ dont dérive la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite (on prendra $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$). Déduire de la partie précédente l'expression de l'énergie mécanique du satellite, et celle de son énergie effective. Tracer l'allure de l'énergie d'interaction effective U_{eff}, donner la valeur de son minimum ainsi que la valeur de r correspondante.

4. Discuter, en fonction des conditions initiales, le type de trajectoire décrite par le satellite. On distinguera 3 cas.

5. Satellisation sur une orbite circulaire :

5.1. Exprimer la vitesse $v(r)$, évaluée dans le référentiel géocentrique, d'un satellite terrestre en orbite circulaire de rayon r. On l'exprimera en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r.

5.2. En déduire la période $T(r)$ du mouvement du satellite.

5.3. Comparer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de gravitation d'un satellite en orbite circulaire.

5.4. On désigne par orbite basse une orbite dont l'altitude est faible devant le rayon terestre. Évaluer numériquement la période et la vitesse d'un satellite décrivant une telle orbite. Que pont-on penser de la durée de vie d'un tel satellite ?

5.5. Qu'appelle-t-on satellite géostationnaire ?

5.6. Dans quel(s) domaine(s) d'application les satellites géostationnaires sont-ils particulièrement utiles ?

5.7. Déterminer l'orbite et calculer le rayon r_g de l'orbite d'un satellite géostationnaire.

5.8. Peut-on lancer un satellite géostationnaire à la verticale de Paris ?

5.9. Que peut-on répondre à un élève qui affirme :

- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est nulle car il est immobile.
- la période de révolution d'un satellité géostationnaire est infinie parce qu'il est immobile.
- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est égale à 1 jours, soit 24h=86400s.
- j'ai lu dans un site internet que la période de révolution d'un satellite géostationnaire vaut 86164s, mais je ne comprends pas pourquoi.

6. Vitesse de libération ou vitesse parabolique :

6.1. Calculer la vitesse minimale, notée v_p, lauqelle il faudrait lancer un satellite soumis à la seule gravitation à partir de la surface de la Terre pour que celui-ci puisse aller à l'infini. Cette vitesse v_p est appelée vitesse de libération, ou vitesse parabolique ou encore seconde vitesse cosmique. Faire l'application numérique.

6.2. Comparer v_p à la vitesse de satellisation en orbite basse. Commenter l'influence d'une modification de la vitesse sur la trajectoire du satellite. Faire un schéma représentant l'allure des trajectoires du satellite par rapport au centre de la Terre en fonction des valeurs de la vitesse initiale du satellite.

6.3. Calculer la vitesse quadratique moyenne de l'oxygène et de l'azote de l'air pris à 293K et justifier le fait que l'atmosphère reste en grande partie piégée autour de la Terre.

7. Problème du transfert : on admettra que l'énergie mécanique d'un satellite en orbite elliptique est de la forme

$$E_m = -\frac{K}{a},$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse trajectoire et K une constante dépendant de la masse de la Terre, de la masse du satellite et de $\mathcal{G}$.

7.1. En identifiant cette expression avec celle de l'énergie d'un satellite en orbite circulaire, déterminer K.

On souhaite faire passer un satellite d'une orbite circulaire basse ($r \approx R_T$) dans le plan équatorial de la Terre à une orbite géostationnaire. Pour cela, on communique une brusque variation de vitesse $\Delta\vec{v}_B$ du satellite en un point B de l'orbite basse, afin que le satellite se trouve sur une orbite elliptique (orbite de transfert de Hohmann) tangente en B à l'orbite basse et tangente en un point H à l'orbite géostationnaire.

7.2. Faire un schéma soigné sur lequel on placera le centre de la Terre, les trajectoires circulaires basse et géostationnaire et l'orbite de transfert.

7.3. Déterminer le demi-grand axe a de l'orbite de transfert.

7.4. Déterminer la variation de vitesse $\Delta\vec{v}_B$ (norme et direction) convenable.

7.5. Lorsque le satellite parvient au point H, on lui communique une nouvelle brusque variation de vitesse $\Delta\vec{v}_H$ afin qu'il puisse passer de l'orbite de transfert à l'orbite géostationnaire. Déterminer la variation de vitesse $\Delta\vec{v}_H$ (norme et direction) convenable.

7.6. Les variations de vitesse Δv_B et Δv_H sont obtenues par la mise en action d'un moteur qui éjecte des produits de combustion avec une vitesse relative d'éjection u et un débit massique D. Si m_B, m_H et m_G sont respectivement la masse du satellite en orbite basse, sur l'orbite de transfert et sur l'orbite géostationnaire, on montre que

$$\Delta v_B = u \ln\left(\frac{m_B}{m_H}\right) \text{ et } \Delta v_H = u \ln\left(\frac{m_H}{m_G}\right).$$

Déterminer le rapport $\frac{m_G}{m_B}$.

Application numérique : $m_G = 1000$ kg ; $u = 3000$ m·s^{-1}. Quelle masse m_B faut-il satelliser en orbite basse ?

7.7. En pratique, l'orbite elliptique de transfert fait passer d'une orbite circulaire d'altitude 200km à l'orbite géostationnaire. Pourquoi ne choisit-on pas une orbite circulaire basse d'altitude inférieure ?

8. Frottements.

8.1. Pour un satellite en orbite basse elliptique, justifier que c'est au voisinage du périgée que les frottements sont les plus intenses.

8.2. On modélise les effets des frottements par une diminution de vitesse au passage au périgée. Monter qualitativement que ce modèle conduit à une circularisation progressive de la trajectoire elliptique.

8.3. Pour un satellite en orbite quasi-circulaire, montrer par un bilan énergétique que les frottements aérodynamiques ont pour effet paradoxal d'accroître la vitesse.

8.4. N'y a-t-il pas contradiction entre ce résultat et celui de la question 8.2. ? Commenter.