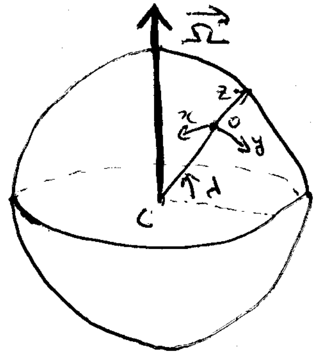
IV Mécanique stellaire

1) Lancement d'un satellite



On considère le repère $(O; x, y, z)$
Soit C le centre de la Terre.
$\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantané de la Terre / R_g référentiel géocentrique

Cinématique : $\vec{V}_{R_g}(O) = \vec{V}_{R_g}(C) + \vec{\Omega} \wedge \vec{CO}$

or $\vec{V}_g(C) = \vec{0}$ et $\vec{\Omega} \wedge \vec{CO} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\Omega\cos\lambda \\ +\Omega\sin\lambda \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ R_T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\Omega R_T \sin\lambda \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

d'où $\boxed{\vec{V}_g(O) = -\Omega R_T \sin\lambda\, \vec{u}_x}$

2) Champ de gravitation

2.1) loi de gravitation universelle

Énoncé

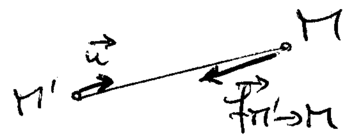
Il existe une force gravitationnelle d'attraction entre deux masses ponctuelles m et m', distantes de $r = MM'$

$$\boxed{\vec{f}_{M' \to M} = \mathcal{G} m m' \frac{\vec{u}}{r^2}}$$

$\vec{u}$ vecteur unitaire, $\vec{u} = \vec{MM'}/r$

$\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle

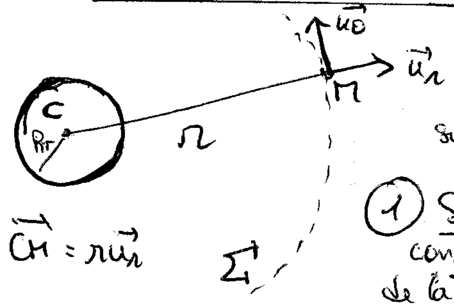
$\mathcal{G} \simeq 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$



2.2) Théorème de Gauss pour le champ de gravité

$$\boxed{\oiint_{\Sigma'} \vec{g} \cdot \vec{dS} = -4\pi \mathcal{G} M_{int}}$$

où M_{int} est la masse totale contenue dans la surface fermée Σ'.



$\vec{CM} = r\vec{u}_r$

Cas du champ de gravitation de la Terre supposée homogène de masse volumique ρ :

① Si $r < R_T$: On considère la surface Σ' constituée par la sphère de centre C (centre de la Terre) et de rayon r.

Par symétrie : $\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}(r) = g(r)\vec{u}_r$.

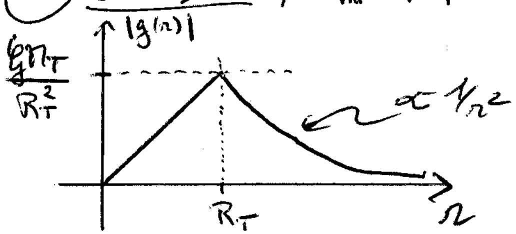
On applique le théorème de Gauss : $\oiint_{\Sigma'} \vec{g} \cdot \vec{dS} = g(r) \oiint_{\Sigma'} \vec{u}_r \cdot \vec{dS}$
$= g(r) 4\pi r^2 = -\mathcal{G} 4\pi M_{int}$

Or $M_{int} = 4/3\, \pi r^3 \rho$ et $\rho = \dfrac{M_T}{4/3\, \pi R_T^3}$ (M_T masse de la Terre).

Donc $M_{int} = \left(\dfrac{r}{R_T}\right)^3 M_T$ soit $\boxed{g(r) = -\mathcal{G} \dfrac{M_T}{R_T^2} \dfrac{r}{R_T}}$

② Si $r > R_T$; $M_{int} = M_T$ donc $\boxed{g(r) = -\mathcal{G} \dfrac{M_T}{r^2}}$

soit $\boxed{\vec{g}(r) = -\mathcal{G} \dfrac{M_T}{r^2} \vec{u}_r}$



3) Lancement d'un satellite artificiel

3.1) Système : {Terre – Satellite}

Actions Mécaniques : force de gravitation : $r = R_T + z$

z altitude ; r distance au centre de la Terre.

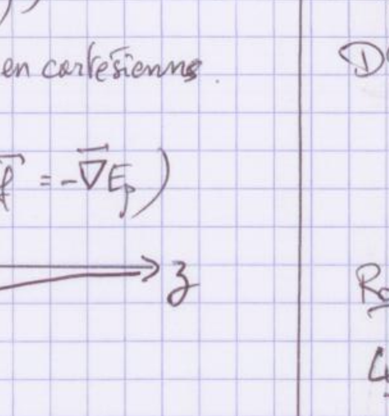
en sphériques, $\vec{f}(M) = -\mathcal{G}\frac{M_T m_S}{r^2}\vec{u_r}$

$$\vec{f}(M) = -\mathcal{G}\frac{M_T m_S}{(R_T+z)^2}\vec{u_r} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\mathcal{G}\frac{M_T m_S}{(R_T+z)}\right)\vec{u_r}$$

soit $\vec{f} = -\vec{\nabla}\left(-\frac{\mathcal{G}M_T m_S}{R_T+z}\right)$ où $\vec{\nabla} = \begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix}$ en cartésiennes.

Donc $\vec{f}$ dérive d'une énergie potentielle E_p $(\vec{f} = -\vec{\nabla}E_p)$

$$\boxed{E_p(z) = -\mathcal{G}\frac{M_T m_S}{R_T+z} + \underbrace{\cancel{cte}}_{=0}}$$



On prend arbitrairement la constante telle que $E_p(z=+\infty) = 0$.

L'énergie mécanique $E_m = E_p + E_c$, avec $E_c = \frac{1}{2}m_S v^2$

Dans le référentiel géocentrique, pour le satellite sur Terre, $V = \Omega R_T \cos\lambda$

d'où l'énergie mécanique initiale en $z=0$:

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m_S\Omega^2R_T^2\cos^2\lambda - \mathcal{G}\frac{M_T m_S}{R_T}}$$

3.2/ La vitesse de libération est définie par rapport au sol, donc dans le référentiel Terrestre. Il faut donc appliquer la composition des vitesses

$$\vec{v}_{R_{géo}} = \Omega R_T \cos\lambda\,\vec{u_\theta} + v\,\vec{u_z}$$

où v est la vitesse dans $R_{terrestre}$

Energie mécanique au décollage

$$E_m = \frac{1}{2}m_S(\Omega^2R_T^2\cos^2\lambda + v^2) - \mathcal{G}\frac{M_T m_S}{R_T}$$

La vitesse de libération est telle que l'on puisse atteindre $z = +\infty$

La vitesse minimum est telle que $v=0$ quand $z=+\infty$ (minimum d'énergie pour atteindre $z=+\infty$). Alors $E_m = E_c + E_p = 0$ car $v_\infty = 0$ et $E_p(+\infty) = 0$.

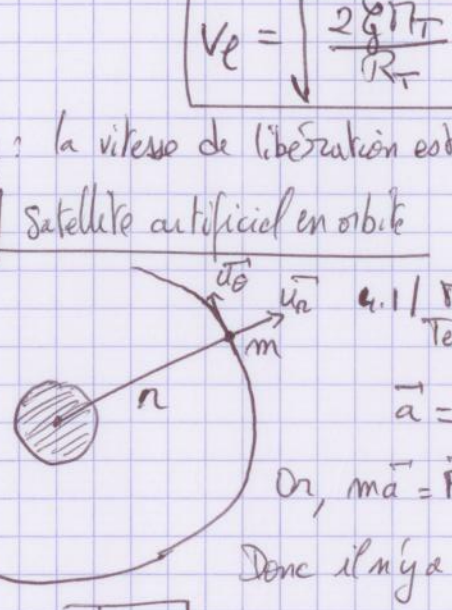
Par conservation de l'énergie mécanique $\boxed{E_m(z=0) = 0}$

D'où v_ℓ vitesse de libération : $v_\ell^2 = \frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T} - \Omega^2R_T^2\cos^2\lambda$

$$\boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T} - \Omega^2R_T^2\cos^2\lambda}}$$

Rq : la vitesse de libération est indépendante de la masse du satellite.

4/ Satellite artificiel en orbite



4.1/ Mouvement circulaire autour de la Terre. Dans la base de Frénet

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N} + \frac{dv}{dt}\vec{T}$$

Or, $m\vec{a} = \vec{F} = m\vec{g}$ → or $\vec{g} = g\vec{u_r}$

Donc il n'y a pas d'accélération tangentielle

donc $\boxed{\frac{dv}{dt} = 0}$ ⇒ mouvement uniforme.

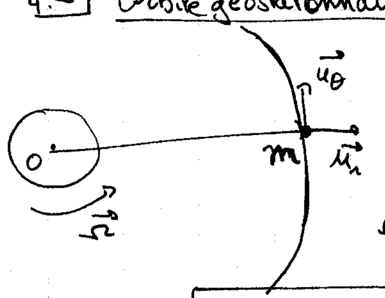
$\|\vec{a}\| = \frac{v^2}{r} = |g| = \frac{\mathcal{G}M_T}{r^2}$ d'où $\boxed{v^2 = \frac{\mathcal{G}M_T}{r}}$

Rq : on peut retrouver cela | en se plaçant en cylindrique (Frenet)
| en utilisant l'énergie mécanique

Période : $vT = 2\pi r$ → $v^2T^2 = 4\pi^2r^2$ ⇒ $\frac{\mathcal{G}M_T}{r}T^2 = 4\pi^2r^2$

soit $\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}}$ On retrouve la 3e loi de Kepler.

4.2) <u>Orbite géostationnaire</u>. Définition : le satellite est immobile dans le référentiel terrestre.



Soit r_g le rayon de l'orbite géostationnaire ($\neq$ altitude), on a $\vec{v} = \Omega r_g \vec{u_\theta}$ car $r_g = \text{cte}$

et $\vec{a} = -\Omega^2 r_g \vec{u_r} = -\mathcal{G}\dfrac{M_T}{r_g^2}\vec{u_r}$ d'où $r^3 = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{\Omega^2}$

D'où $\boxed{r_{géostat} = \left(\dfrac{\mathcal{G}M_T}{\Omega^2}\right)^{1/3}}$ A.N. $\boxed{r_{géo} = 42\,230\text{ km}}$

d'où l'altitude $\boxed{z_{géo} = 35\,850\text{ km}}$

4.3) $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\dfrac{M_T m}{r_{géo}} = \dfrac{1}{2}m\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r_{géo}} - \mathcal{G}\dfrac{mM_T}{r_{géo}} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r_{géo}}$

car $v = r_{géo}\Omega = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r_{géo}}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{E_m = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r_{géo}}}$

On communique de l'énergie au satellite : $E_m \longrightarrow E_m' = E_m + \Delta E_c$
On change E_m' tel que $r \to +\infty$ soit accessible à la particule (le satellite), soit $E_m' > 0$
Le cas limite ($E_m = 0$) correspond à la variation d'énergie minimale nécessaire soit
$E_m' = 0 = E_m + \Delta E_c$ soit $\boxed{\Delta E_c = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r_{géo}}}$ A.N. : $\Delta E_c = 3{,}3 \cdot 10^3\text{ MJ}$

4.4) $E_m = E_{m_0}(1 + bt)$ $\boxed{b > 0}$

⚠ ici le satellite est en orbite donc $\boxed{E_{m_0} < 0}$

$E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{\mathcal{G}M_T m_s}{r} = E_{m_0}(1 + bt)$

<u>Orbite circulaire</u> : $v = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{r}$ soit $E_{m_0}(1 + bt) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r(t)}$

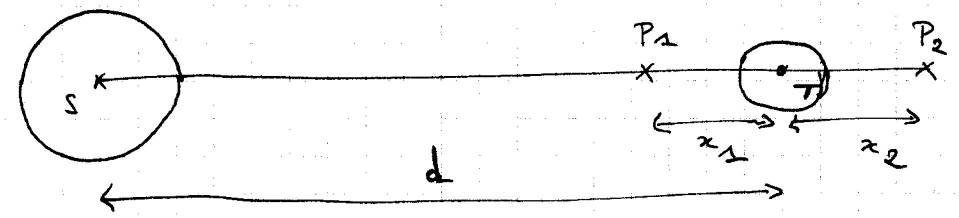
d'où $\boxed{r(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{E_{m_0}(1 + bt)}}$

et on en déduit $\boxed{v(t) = \sqrt{\dfrac{-2E_{m_0}(1 + bt)}{m}}}$

Donc $r(t) \searrow$ mais $v(t) \nearrow$ (car $E_c = -\dfrac{1}{2}E_p$) Donc $E_p \searrow$ mais $E_c \nearrow$
et $E_m = E_c + E_p = -E_c$ donc $E_m \searrow \Rightarrow E_c \nearrow$

<u>L'énergie perdue est dissipée par frottements.</u>

5) <u>Sonde solaire</u>



On se place dans le <u>référentiel $\mathcal{R}$</u> : de centre S le centre du soleil,
et tournant tel que T, le centre de la Terre, soit immobile dans $\mathcal{R}$
Donc $\mathcal{R}$ tourne à la fréquence angulaire de rotation de la Terre autour du soleil.
P_1 et P_2 sont alors immobile dans <u>$\mathcal{R}$ qui n'est pas galiléen</u>
Il faut tenir compte des forces d'inerties.
<u>Bilan des actions mécaniques sur P</u> :
- force d'inertie d'entrainement ;
- force gravitationnelle du Soleil ;
- force gravitationnelle de la Terre.

La force d'inertie d'entrainement de Coriolis est nulle si P est immobile.
$\vec{\Omega}_{T/S}$ = vitesse angulaire de la Terre dans le référentiel héliocentrique $\mathcal{R}_0$

Dans $\mathcal{R}$, <u>P est immobile</u> ; $\sum \vec{f} = \vec{0}$ soit $\boxed{\vec{f_{ie}} + \vec{f}_{S\to P} + \vec{f}_{T\to P} = \vec{0}}$

Or $\begin{cases} \vec{f_{ie}} = -m\vec{a_e} = +m\,\Omega_{T/S}^2\,\vec{SP} & \text{(force centrifuge)} \\ \vec{f}_{S\to P} = -\dfrac{\mathcal{G}M_S m}{SP^3}\vec{SP} \\ \vec{f}_{T\to P} = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{TP^3}\vec{TP} \end{cases}$

<u>Cas de P_1</u> : $0 = m\,\Omega^2_{T/S}(d-x) - \mathcal{G}\dfrac{M_S m}{(d-x)^2} + \mathcal{G}\dfrac{M_T m}{x^2}$

3ᵉ loi de Kepler : $\Omega^2_{T/S} = \dfrac{\mathcal{G}M_S}{d^3}$

d'où $\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{x^2} - \dfrac{\mathcal{G}M_S m}{(d-x)^2} + \dfrac{\mathcal{G}M_S m}{d^3}(d-x) = 0$

$\rightarrow \dfrac{1}{kx^2} - \dfrac{1}{(d-x)^2} + \dfrac{d-x}{d^3} = 0$

<u>DL</u> : $-\dfrac{1}{d^2}\left(1+\dfrac{2x}{d}\right) + \dfrac{1}{kx^2} + \dfrac{d-x}{d^3} = 0 \iff -\dfrac{3x^3}{d^3} + \dfrac{1}{k} = 0$

d'où $\boxed{x_1 = \left(\dfrac{1}{3k}\right)^{1/3} d}$ AN : $d = 150$ Mkm $= 150 \cdot 10^6$ km

$\boxed{x_1 = 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ km}}$

$x/d \sim 0{,}1\%$ ok pour le DL.

<u>Cas de P_2</u> : $0 = m\,\Omega^2_{T/S}(d+x) - \mathcal{G}\dfrac{M_S m}{(d+x)^2} - \mathcal{G}\dfrac{M_T m}{x^2}$

... $\boxed{x_2 = \left(\dfrac{1}{3k}\right)^{1/3} d}$ P_2 est le symétrique de P_1 par rapport à la Terre

5.2/ <u>Avantage des points de Lagrange</u> :

ce sont des positions d'équilibre, mais on peut montrer que ce sont des positions d'équilibre <u>instables</u>. Mais cela permet à un satellite de rester immobile en dépensant un minimum d'énergie pour maintenir sa position

Rq. Il existe <u>5 points de Lagrange</u> pour un système binaire dont 2 sont des positions d'équilibre stable.

<u>ex</u> : Sonde Soho en L1 → étudie le soleil

Sonde Map en L2 → Microwave Anisotropy Probe (température de l'univers) !

<u>Interaction TERRE-LUNE : le phénomène de marées (extrait Agreg B 1999)</u>

1) Loi de gravitation universelle $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{g} = -\mathcal{G}\frac{m_L}{LP^2}\overrightarrow{u_{LP}}}$

2/ Potentiel de gravitation ϕ tel que $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \boxed{\phi = -\mathcal{G}\frac{m_L}{LP}}$

3/ $LP = \sqrt{(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CL})^2} = \underline{\left(r^2+d^2-2rd\cos\theta\right)^{1/2}}$

4/ $d \gg r \Rightarrow LP = d\left(1+\left(\frac{r}{d}\right)^2 - 2\frac{r}{d}\cos\theta\right)^{1/2}$

Développement à l'ordre 2 : $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1+\alpha\varepsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\varepsilon^2$

Donc $LP \simeq d\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{d}\right)^2 - \left(\frac{r}{d}\right)\cos\theta - \frac{1}{8}\,4\left(\frac{r}{d}\right)^2\cos^2\theta\right)$

$LP \simeq d\left(1-\left(\frac{r}{d}\right)\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{d}\right)^2\sin^2\theta\right)$.

Soit $\frac{1}{LP} \simeq \frac{1}{d}\left(1-\left(\frac{r}{d}\right)\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{d}\right)^2\sin^2\theta\right)^{-1}$

$\simeq \frac{1}{d}\left(1+\left(\frac{r}{d}\right)\cos\theta + \left(\frac{r}{d}\right)^2\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)\right)\right)$

$\simeq \frac{1}{d}\left(1+\left(\frac{r}{d}\right)\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{d}\right)^2\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right)$

d'où $\boxed{\phi = -\mathcal{G}\frac{m_L}{d} - \mathcal{G}\frac{m_L r}{d^2}\cos\theta + \mathcal{G}\frac{m_L}{2d^3}r^2\left(1-3\cos^2\theta\right)}$

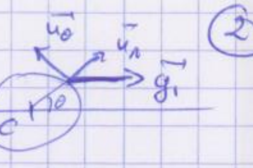
soit $\boxed{a(\theta) = \phi_0\cos\theta}$; $\boxed{b(\theta) = -\frac{\phi_0}{2}\left(1-3\cos^2\theta\right)}$

avec $\phi_0 = -\mathcal{G}\frac{m_L}{d}$

5/ $\vec{g_1} = -\vec{\nabla}\left(a(\theta)\frac{r}{d}\right) = -\frac{\partial\left(a(\theta)\frac{r}{d}\right)}{\partial r}\vec{u_r}$

$-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a(\theta)\frac{r}{d}\right)\right)\vec{u_\theta}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{g_1} = \mathcal{G}\frac{m_L}{d^2}\cos\theta\,\vec{u_r} - \mathcal{G}\frac{m_L}{d^2}\sin\theta\,\vec{u_\theta}}$

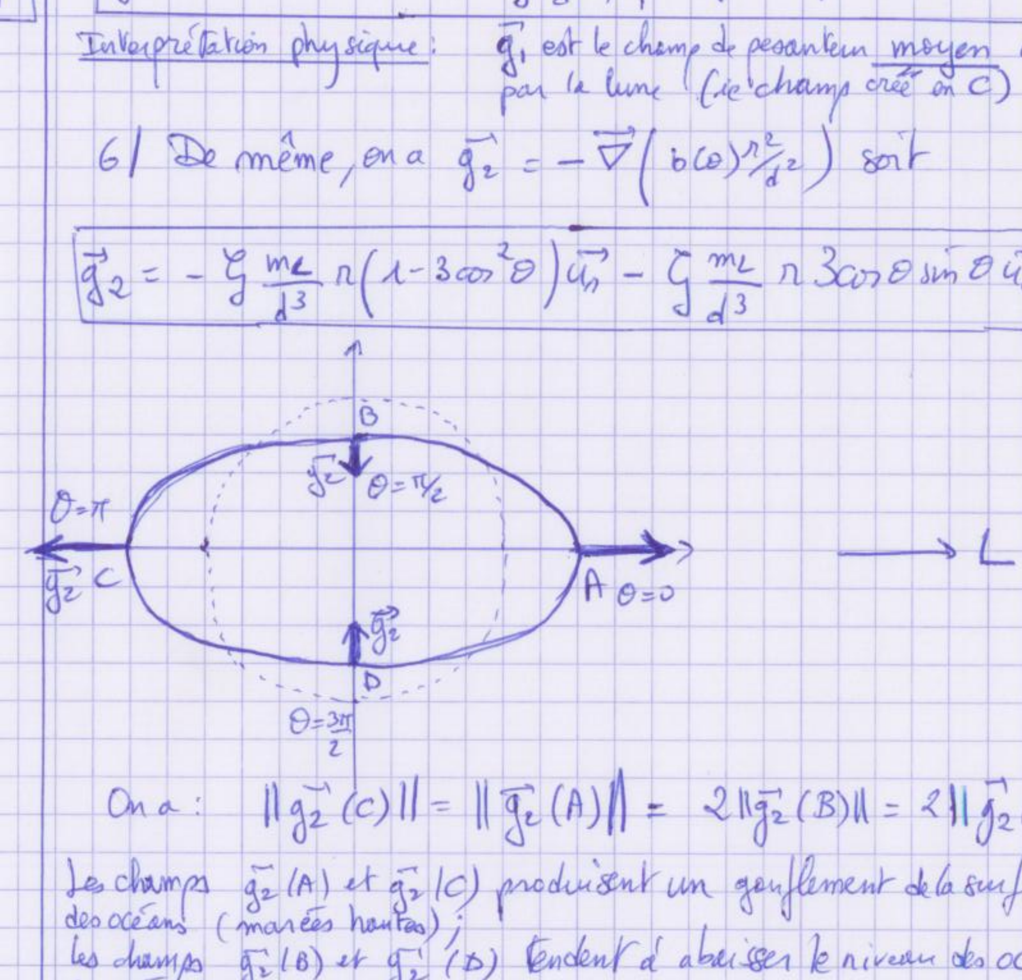


$\boxed{\vec{g_1} \text{ est un vecteur de norme } \mathcal{G}\frac{m_L}{d^2}, \text{ porté par la parallèle à } \overrightarrow{CL}.}$

<u>Interprétation physique</u> : $\vec{g_1}$ est le champ de pesanteur <u>moyen</u> créé par la lune (ie champ créé en C)

6/ De même, on a $\vec{g_2} = -\vec{\nabla}\left(b(\theta)\frac{r^2}{d^2}\right)$ soit

$\boxed{\vec{g_2} = -\mathcal{G}\frac{m_L}{d^3}r\left(1-3\cos^2\theta\right)\vec{u_r} - \mathcal{G}\frac{m_L}{d^3}r\,3\cos\theta\sin\theta\,\vec{u_\theta}}$



On a : $\|\vec{g_2}(C)\| = \|\vec{g_2}(A)\| = 2\|\vec{g_2}(B)\| = 2\|\vec{g_2}(D)\|$

Les champs $\vec{g_2}(A)$ et $\vec{g_2}(C)$ produisent un gonflement de la surface des océans (marées hautes) ;
les champs $\vec{g_2}(B)$ et $\vec{g_2}(D)$ tendent à abaisser le niveau des océans (marées basses) :

La Terre fait un tour sur elle-même en un jour, un point de la Terre se trouve en position A, puis C chaque jour

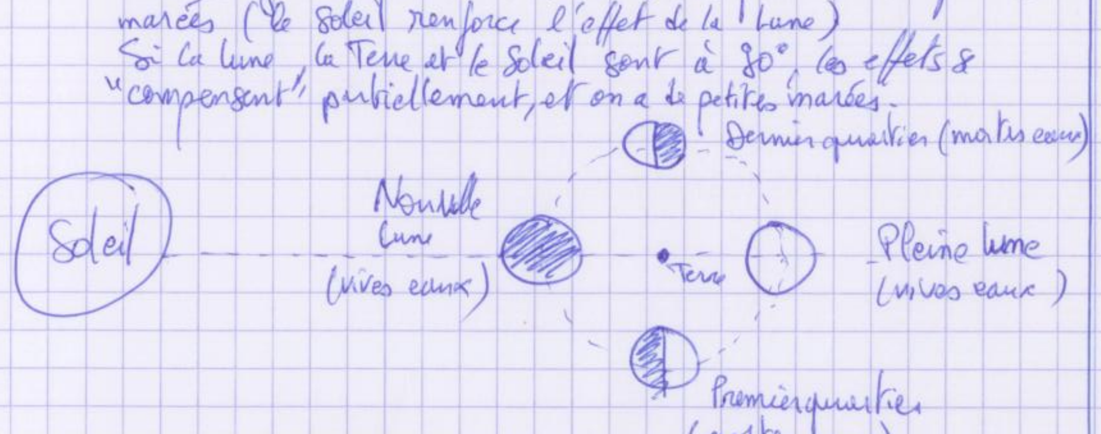
$\hookrightarrow$ deux marées hautes par jours

idem pour B et D $\Rightarrow$ deux marées basses par jours.

Rq : Il faudrait en toute rigueur tenir compte des frottements fluides et de l'inertie des masses d'eau qui tendent à ralentir la rotation de la Terre, ainsi que de l'interaction Terre - Soleil.

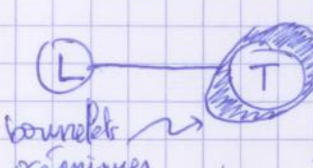
Un alignement Terre - Lune Soleil produit des grandes marées (le Soleil renforce l'effet de la Lune)

Si la Lune, la Terre et le Soleil sont à 90°, les effets se "compensent" partiellement, et on a de petites marées.



7/ La Terre s'oppose par frottements fluides au mouvement relatif de l'océan par rapport à elle

↳ mouvement des bourrelets océaniques qui suivent en premier approximativement l'axe Terre - Lune, avec un léger angle dû à l'inertie des masses d'eau



L'océan dissipe de l'énergie et tend à retenir la Terre pour qu'elle ne se déplace pas par rapport aux bourrelets. Cela se traduit par un ralentissement de la rotation propre de la Terre dans le référentiel géocentrique.

La durée du jour s'allonge en moyenne de 0,00164 s/siècle

Ce ralentissement devrait s'effectuer jusqu'à l'immobilité de la Terre par rapport aux bourrelets, c-à-d que la Terre tourne à la même vitesse que la Lune dans Rgéocentrique.

8/ Nous avons approximé la Terre comme un solide indéformable, mais d'un point vu géophysique, la Terre elle-même se déforme sous l'action d'un champ gravitationnel différentiel

L'amplitude de cette déformation est de quelques cm.