MECANIQUE STELLAIRE

(I) Le problème à deux corps

1.1/ Particule M_1 : $m_1 \frac{d^2\vec{OM_1}}{dt^2} = \vec{f}_{2\to1}$

Particule M_2 : $m_2 \frac{d^2\vec{OM_2}}{dt^2} = \vec{f}_{1\to2} = -\vec{f}_{2\to1} = \vec{f}$

$\longrightarrow$ $\boxed{m_1 \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = -\vec{f}}$ $\boxed{m_2 \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = +\vec{f}}$

1.2/ $\vec{OG} = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}) \Rightarrow \frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = \frac{1}{m_1+m_2}\Big(\underbrace{m_1\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2}}_{-\vec{f}} + \underbrace{m_2\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2}}_{+\vec{f}}\Big) = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = \vec{0}}$ Mouvement de translation rectiligne uniforme dans R de G.

Le mouvement d'ensemble du système de particules est un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_R(G)$.

1.3/ $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{f}$. On définit μ la masse réduite selon $\boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$

Alors $\vec{r}$ vérifie $\boxed{\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}}$

1.4/ Cette expression s'identifie au cas où l'on appliquerait le PFD dans R^* à une particule fictive de masse μ, de position $\vec{r} = \vec{GM}$, subissant une force $\vec{f}$ de la part de G.

1.5/ R^* n'est pas galiléen dans le cas général. Cependant, dans le cas présent, G est en translation rectiligne uniforme dans R galiléen, donc R^* l'est aussi et donc est galiléen.

1.6/ $\vec{OM_i} = \vec{OG} + \vec{GM_i}$.

de plus $\begin{cases} \vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \vec{M_1M_2} \\ m_1\vec{GM_1} + m_2\vec{GM_2} = \vec{0} \text{ par définition de G} \end{cases}$

Donc $\vec{GM_1} = \vec{GM_2} + \vec{M_2M_1} = -\frac{m_1}{m_2}\vec{GM_1} - \vec{r}$

d'où $\boxed{\vec{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}}$. De même, $\boxed{\vec{GM_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}}$

D'où le résultat : $\boxed{\begin{aligned}\vec{OM_1} &= \vec{OG} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}(t) \\ \vec{OM_2} &= \vec{OG} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}(t)\end{aligned}}$ (1)

Quantité de mouvement de la particule fictive

$$\vec{p^*} = \mu\vec{V}(M/R^*) \longrightarrow \boxed{\vec{p^*} = \mu\dot{\vec{r}}}$$

où la dérivée est prise par rapport à R^*

Moment cinétique : $\vec{L^*}(G) = \mu\vec{GM} \wedge \frac{d\vec{GM}}{dt}$

$$\boxed{\vec{L^*}(G) = \mu\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}} \text{ dans } R^*$$

Energie cinétique dans R^* $E_c^* = \frac{1}{2}\mu V^2_{(M/R^*)} \longrightarrow \boxed{E_c^* = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2}$

1.7/ $r(t)$ est supposé connu, et G est en translation rectiligne uniforme. Donc en utilisant (1) le problème est résolu par homothétie par rapport à G.

ex : $\vec{OM_1} = \underbrace{\vec{OG}}_{\text{mvt d'ensemble}} - \underbrace{\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}(t)}_{\text{mouvement relatif}}$.

1.8/ Si $m_1 \gg m_2$, le mouvement de G s'identifie à celui de M_1 (la particule la plus massive) dans R, tandis que dans R^*, le mobile fictif s'identifie à M_2 et M_1 est immobile.

Ex : Terre-Soleil, $M_{Soleil} \gg M_{Terre}$
Noyau-électron, $m_{noyau} \gg m_e$

[2] Moment cinétique

2.1/ $\vec{L^*}(A) = \vec{AM_1} \wedge m_1\frac{d\vec{GM_1}}{dt} + \vec{AM_2} \wedge m_2\frac{d\vec{GM_2}}{dt}$

$= \vec{AG} \wedge \left(m_1\frac{d\vec{GM_1}}{dt} + m_2\frac{d\vec{GM_2}}{dt}\right) + \vec{GM_1} \wedge m_1\frac{d\vec{GM_1}}{dt} + \vec{GM_2} \wedge m_2\frac{d\vec{GM_2}}{dt}$

$$\vec{L}^*(A) = \vec{L}^*(G) + \vec{AG} \wedge \frac{d}{dt}\underbrace{\left(m_1 \vec{GM_1} + m_2 \vec{GM_2}\right)}_{=\vec{0} \text{ par définition de } G}$$

$$\Rightarrow \forall A, \quad \boxed{\vec{L}^*(A) = \vec{L}^*(G)}$$

$\vec{L}^*$ est indépendant du point considéré.

$$\vec{L}^* = \vec{GM_1} \wedge m_1 \frac{d\vec{GM_1}}{dt} + \vec{GM_2} \wedge m_2 \frac{d\vec{GM_2}}{dt}$$

Or $\vec{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$ et $\vec{GM_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$. On obtient alors aisément :

$$\boxed{\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}}$$

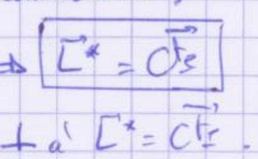
<u>Le moment cinétique barycentrique du système est égal au moment cinétique de la particule fictive dans R^*.</u>

2.2/ La particule fictive subit dans R^* une force $\vec{f}$ centrée en G : mouvement à force centrale donc

$$\frac{d\vec{L}^*(G)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L}^* = \vec{C^{te}}}$$

De plus, $\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{r} \in \pi$ plan $\perp$ à $\vec{L}^* = \vec{C^{te}}$.

Donc la particule se déplace dans un plan constant

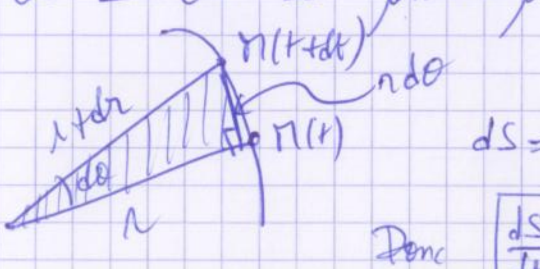


2.3/ En coordonnées polaires, $\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$

$$\vec{L}^* = \mu r \vec{u_r} \wedge (\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})$$

$$\Rightarrow \vec{L}^* = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{u_z}$$

Or $\vec{L}^* = \vec{C^{te}} \Rightarrow \mu r^2 \dot{\theta} = \mu C = C^{te}$. $\quad \boxed{C = r^2 \frac{d\theta}{dt}}$ constante des aires.



$$dS = \frac{1}{2}(r\,d\theta)\,r = \frac{C}{2}\,dt.$$

Donc $\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}}$

Dans un mouvement à force centrale, le rayon vecteur balaie des aires égales pendant des durées égales.

3 Approche énergétique

3.1/ $E_c^* = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d\vec{GM_1}}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d\vec{GM_2}}{dt}\right)^2$

et compte tenu de l'expression de $\vec{GM_1}$ et $\vec{GM_2}$ en fonction de $\vec{r}$, on a

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2$$

soit $\boxed{E_c^* = \frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^2}$

<u>L'énergie cinétique du système constitué par les particules dans R^* est égale à celle de la particule fictive associée, calculée également dans le référentiel barycentrique.</u>

On se place en polaires : $\vec{r} = r\vec{u_r}$; $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

Donc $E_c^* = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$. Or $r^2\dot{\theta} = C^{te} = \frac{L^*}{m}$,

par conservation du moment cinétique. Donc $\boxed{\dot{\theta} = \frac{L^*}{mr^2}}$

$E_c^* = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + \frac{L^{*2}}{m^2 r^2}\right)$ soit pour $C = \frac{L^*}{m}$ (constante des aires)

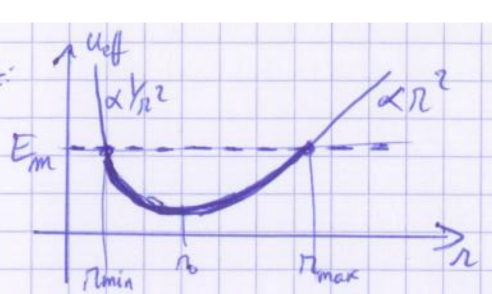
on obtient immédiatement $\boxed{E_c^* = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right)}$.

3.2/ $E_m = E_c^* + U(r)$ dans R^* soit

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) + U(r)}$$

Soit $\boxed{U_{eff}(r) = \frac{1}{2}\frac{\mu C^2}{r^2} + U(r)}$ On se ramène à un mouvement 1D selon r dans un potentiel effectif $U_{eff}(r)$.

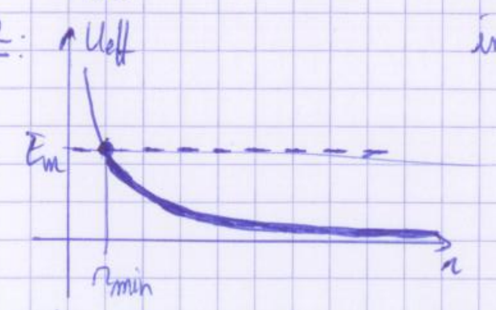
Connaissant l'énergie mécanique totale E_m et l'allure du $U_{eff}(r)$, on peut discuter du caractère borné ou non de la trajectoire.

ex1. 

$U(r) \propto r^2$ (att. élastique) (5)

Trajectoire bornée

↳ $\boxed{\text{ETAT LIÉ}}$

ex2. 

interaction répulsive $U(r) \propto 1/r$

Trajectoire non bornée ($r \geq r_{min}$)

↳ $\boxed{\text{ETAT LIBRE}}$

(6)

3.4/ L'énergie mécanique est conservée $E_m = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$

d'où $\boxed{\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E_m - U_{eff}(r))}}$

Alors $\displaystyle\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E_m - U_{eff}(r))}} = \pm \int dt$ donne accès à $r(t)$.

La conservation du moment cinétique donne $\boxed{\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}}$ d'où

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{C}{r^2}\, dt + \theta(t_0).$$

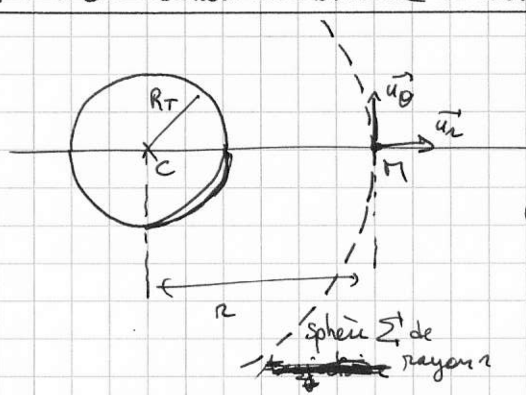
3.5/ Une fois $(r;\theta)$ obtenu, on a $\vec{r}$ donc $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ selon les équations de la question 1.7/.

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_1 = \overrightarrow{OG} - \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}(t) \\ \overrightarrow{OM_2} = \vec{r}_2 = \overrightarrow{OG} + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}(t) \end{cases}$$

G est en translation rectiligne uniforme.

(II) Cas d'une interaction newtonienne attractive (d'après CAPES 2002)

[1] 1/



On a $\vec{g} = -\mathcal{G}\dfrac{M_T}{r^2}\vec{u_r}$

le champ de pesanteur en M.

[Rappel : Th. de Gauss pour la gravitation.

hyp : répartition sphérique des masses (sym. sphérique).

Par symétrie, $\vec{g}(\vec{r}) = g(r)\vec{u_r}$. On considère une sphère Σ de rayon r pour appliquer le théorème de Gauss :

$$\oiint_\Sigma \vec{g}\cdot\vec{dS} = -4\pi\mathcal{G}\underbrace{M_{int}}_{\text{masse dans }\Sigma} = -4\pi\mathcal{G}M_T. \quad \text{Or } \oiint_\Sigma \vec{g}\cdot\vec{dS} = \oiint_\Sigma g(r)\,\vec{u_r}\cdot\vec{dS}$$

$$= g(r)\oiint_\Sigma \vec{u_r}\cdot\vec{dS} = g(r)\,4\pi r^2.$$

d'où $\boxed{g(r) = -\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r^2}}$.]

PFD en polaire (dans le plan de la trajectoire) : $m\vec{a} = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r^2}\vec{u_r}$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})$. Or $\dot{r} = 0$ car la trajectoire est circulaire.

$\vec{a} = \dfrac{d}{dt}(r\dot{\theta}\vec{u_\theta}) = r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{u_r}$

donc $m\vec{a} = -\mathcal{G}\dfrac{M_T m}{r^2}\vec{u_r} \Rightarrow \begin{vmatrix} -mr\dot{\theta}^2 \\ +mr\ddot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r^2} \\ 0 \end{vmatrix}$

d'où $\boxed{\ddot{\theta} = 0}$ donc $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ et $v = C^{te} = r\dot{\theta}$

d'où $\cancel{m}v^2 = \mathcal{G}\dfrac{M_T \cancel{m}}{r}$ soit $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r}}}$

2/ Mouvement circulaire uniforme ($v = C^{te}$) $\Rightarrow T(r) = \dfrac{2\pi r}{v(r)}$

D'où $T(r) = 2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{\mathcal{G}M_T}}$ soit $\boxed{\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}}$ 3ième loi de Képler.

3/ Energie cinétique, $E_c = \frac{1}{2}m_s v^2 = \frac{1}{2}m_s\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r}$

Energie potentielle de gravitation (Cf cours) $E_p = -m_s\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r} + \cancel{C^{te}}$ prise = 0

on a $\boxed{E_p = -2E_c}$

4) En orbite basse, $r = R_T + h$ avec $h \ll R_T$

Au premier ordre en h/R_T

$$v(h) = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}}\left(\frac{1}{1+h/R_T}\right)^{1/2} \simeq \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}}\left(1 - \frac{h}{2R_T}\right)$$

A l'ordre le plus bas : $\boxed{v(h) \xrightarrow[h\to 0]{} \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} = v_0}$ vitesse d'orbite basse.

De même, $\boxed{T(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 2\pi\sqrt{\dfrac{R_T^3}{\mathcal{G}M_T}}}$

A.N. : $v_0 = 7906$ m/s

$T = 5082$ s $= 1$ h 24 min 42 s

5) Un satellite géostationnaire est un satellite fixe dans le référentiel terrestre. En particulier, sa période de révolution vaut $T = 24$ h dans le référentiel géocentrique.

6) GPS ; télécommunications.

7) Dans R_T, référentiel terrestre, $\vec{V}(M/R_T) = \vec{0}$

Loi de composition des vitesses entre $R_{géo}$ et R_T : $\vec{V}(M/R_{géo}) = \vec{V}(M/R_T) + \vec{\omega}\wedge\vec{OM}$

où O est le centre de la Terre, $\vec{\omega}$ vecteur rotation instantané de rotation de la Terre, M position du satellite.

$\vec{V}(M/R_T) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(M/R_{géo}) = \vec{\omega}\wedge\vec{OM}$ donc $\boxed{\vec{V} \perp \vec{\omega}}$

M se déplace dans un plan $\perp$ à $\vec{\omega}$. Or, comme la force est centrale, pour rester dans ce plan, il faut être dans le plan de l'équateur.

Le plan de la trajectoire est le plan équatorial.

Rayon de l'orbite : $r_{géo} = \left(\frac{\mathcal{G} M_T \cdot T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$ avec $T = 24\,h$

A.N. : Rayon de l'orbite : $\boxed{r_g = 42\,300 \text{ km}}$, soit une altitude $h = r_g - R_T$

$\boxed{h = 35\,900 \text{ km}}$ ⚠ altitude ≠ rayon d'orbite.

8) Non car Paris n'est pas dans le plan équatorial.

9) Toutes ces affirmations sont potentiellement fausses ou incohérentes tant qu'on ne précise pas le référentiel d'observation.
Il y a également confusion entre jour sidéral (86 164 s) et solaire (86 400 s).

2 1/ Un point, dans un champ newtonien en $1/r^2$, peut aller à l'infini si son énergie mécanique peut être supérieure à $U(\infty) = 0$. Le cas limite correspond à l'énergie minimale nécessaire pour aller à $r \to +\infty$, et se "libérer" du potentiel attractif, ie pour $E_m = 0$ ($v = 0$ quand $r \to +\infty$).

Vitesse v_i nécessaire pour que $E_m = 0$ à la surface de la Terre.

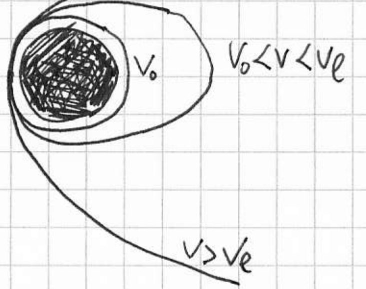
$E_m = \frac{1}{2} m_s v_i^2 - \mathcal{G}\frac{M_T m_s}{R_T} \geq 0$, ~~et~~

donc $\boxed{v_i \geq v_\ell = \sqrt{2\mathcal{G}M_T/R_T} = \sqrt{2}\, v_0}$ vitesse de libération.

v_ℓ est indépendant de la direction de lancement : AN : $\boxed{v_\ell = 11{,}2 \text{ km/s}}$

2) $v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}}$ est la vitesse d'orbite basse : $\boxed{v_\ell = \sqrt{2}\, v_0}$

La marge est faible entre v_0 et $v_\ell = \sqrt{2}\, v_0$; une modification de la vitesse doit avoir une influence importante sur la trajectoire.



3) $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

M masse molaire

u vitesse quadratique moyenne

(Cf Thermo)

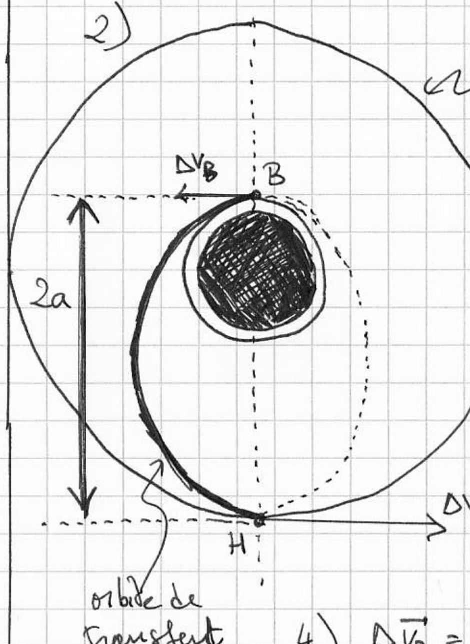
(di)azote : $u_{N_2} = 511$ m/s (di)oxygène : $u_{O_2} = 478$ m/s.

ces vitesses sont très inférieures à v_ℓ → atmosphère stable.

3 1) En orbite circulaire $E_m = E_p + E_c = -\frac{1}{2}E_p + E_p = \frac{1}{2}E_p$

$\boxed{E_m = -\frac{m_s M_T \mathcal{G}}{2r}}$ d'où, par identification $\boxed{K = \frac{\mathcal{G}M_T m_s}{2}}$

2)



orbite géostationnaire

L'orbite de transfert est demi-elliptique, bitangente aux orbites circulaires et géostationnaires.

3) Le demi-grand axe de l'orbite de transfert vaut $2a = r_B + r_g$

D'où $\boxed{a = \frac{1}{2}(r_B + r_g)}$

basse ↲ ↳ géostationnaire

→ $\boxed{a \simeq \frac{1}{2}(R_T + r_g)}$ car $r_B \simeq R_T$

4) $\Delta \vec{v_B} = ?$ Sur la trajectoire circulaire $v_B = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}}$.

$E_m = -\frac{K}{a}$ sur l'elliptique, donc $v_B' = \sqrt{-\frac{\mathcal{G}M_T}{a} + \frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}}$

soit $\boxed{v_B' = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}}\left(1 - \frac{1}{1 + r_g/R_T}\right)^{1/2}}$

A.N. $\Delta v_B' = 2515$ m/s

et $\Delta \vec{v_B}'$ est tangent à la trajectoire.

5) En H, sur la trajectoire circulaire, $v_H' = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_g}}$

Sur l'elliptique ($r = r_g$ et $a = \frac{1}{2}(R_T + r_g)$)

↪ $v_H = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{r_g}\left(1 - \frac{1}{1 + R_T/r_g}\right)}$

d'où $|\Delta \vec{v}_H| = v_H' - v_H = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G} M_T}{r_g}} \left(1 - \sqrt{\dfrac{2R_T}{R_T + r_g}}\right) \rightarrow \boxed{|\Delta \vec{v}_H| = 1500\,m/s}$

↳ tangent à la trajectoire

6) On a $\Delta v_B + \Delta v_H = u \ln\left(\dfrac{m_B}{m_G}\right)$

$$\Delta v_B + \Delta v_H = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r_g}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R_T}{r_g + R_T}}\right) + \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{R_T}} \left(\sqrt{\frac{2 r_g}{r_g + R_T}} - 1\right)$$

<u>A.N.</u> $u \ln\left(\dfrac{m_B}{m_G}\right) = 4015\,m/s \longrightarrow \dfrac{m_B}{m_G} = 0{,}26$ soit $\boxed{m_B = 3{,}8 \text{ tonnes}}$

7) Sur une orbite de 200 km d'altitude, on peut s'affranchir des problèmes liés à l'atmosphère (frottements, ...)

4 1) Au périgée (point le plus proche du foyer attracteur ≠ apogée) la vitesse du satellite est la plus élevée :

$$\boxed{v = 2\mathcal{G} M_T \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}$$

↳ augmente ainsi l'importance des frottements (point le plus proche de l'atmosphère de surcroît.

2) Cette diminution de vitesse revient, en utilisant le même genre de raisonnement qu'en **3**, au transfert d'une trajectoire elliptique vers circulaire.

3) Pour une orbite quasi-circulaire, $E_m = E_c + E_p = -2E_c + E_c$
$= -E_c$

Donc si $E_m \searrow$, $E_c \nearrow$ donc $v \nearrow$

4) Le raisonnement précédent tient du fait que $E_p = -2E_c$ de sorte que la décroissance de E_p l'emporte sur l'augmentation de E_c. Cela ne peut pas se transcrire directement pour une trajectoire elliptique où E_c dépend du point de la trajectoire.

<u>Donc, $E_c \nearrow$ en moyenne -</u>