

TD6 Mécanique stellaire

I. ÉTUDE GÉNÉRALE DU PROBLÈME À DEUX CORPS

On considère un système isolé de deux points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 en interaction. On note $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$ la force exercée par M_1 sur M_2 . D'après le principe d'action-réaction, $\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$ est la force exercée sur M_1 par M_2 . On note G le barycentre et \mathcal{R}^* le référentiel de centre de masse associé. On étudie le mouvement de ces points dans \mathcal{R} , référentiel supposé galiléen. Soit O un point fixe de \mathcal{R} . On note $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$. Soit $U(\|\vec{r}\|)$ l'énergie potentielle d'interaction entre M_1 et M_2 , où $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. On cherche à déterminer $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$.

1 Particule fictive

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacune des particules dans \mathcal{R} .

2. En déduire la loi d'évolution de G dans \mathcal{R} .

3. Montrer que le problème à deux corps peut se ramener à une équation différentielle sur \vec{r} . On fera apparaître la masse réduite μ dont on précisera l'expression.

4. Interpréter cette équation en introduisant la notion de particule fictive M associée au système. On précisera sa position par rapport à G , sa masse et la force subit dans \mathcal{R}^* .

On se place désormais dans \mathcal{R}^* .

5. \mathcal{R}^* est-il galiléen dans le cas général ? Quand est-il dans le cas présent ?

6. Exprimer $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ en fonction de \vec{r} et \overrightarrow{OG} . Donner l'expression de la quantité de mouvement \vec{p}^* , du moment cinétique $\vec{L}^*(G)$ en G et de l'énergie cinétique E_c^* de la particule fictive dans \mathcal{R}^* .

7. Une fois le mouvement de la particule fictive obtenue ($\vec{r}(t)$), comment résoudre complètement le problème (*i.e.* obtenir \vec{r}_1 et \vec{r}_2) dans \mathcal{R} .

8. **Cas particulier important :** on envisage le cas où l'une des deux particules a une masse très supérieure à celle de l'autre, par exemple $m_1 \gg m_2$. Peut-on identifier la particule fictive à l'une des deux particules réelles ? Citer un exemple de problème que l'on résoud dans ce cadre là.

2 Moment cinétique

1. Déterminer le moment cinétique dans \mathcal{R}^* par rapport à un point A quelconque. Montrer que $\vec{L}^*(A)$ est indépendant de A . On note \vec{L}^* ce moment cinétique. Le comparer à celui de la particule fictive dans \mathcal{R}^*

2. On raisonne toujours dans \mathcal{R}^* . Montrer que

- \vec{L}^* est conservé,
- la trajectoire de la particule fictive est plane.

Dans le plan de la trajectoire, orienté par le moment cinétique, on note (r, θ) les coordonnées polaires de \overrightarrow{GM} .

3. Montrer que $C = r^2 \dot{\theta}$ est une constante. Justifier le nom de constante des aires donnée à la grandeur $\frac{C}{2}$, en retrouvant la 2^e loi de Képler.

3 Approche énergétique

1. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c^* du système constitué par les deux particules M_1 et M_2 dans \mathcal{R}^* . Montrer que cette expression est identique à celle obtenue pour la particule fictive dans \mathcal{R}^* . Exprimer E_c^* en coordonnées polaires et montrer que

$$E_c^* = \frac{1}{2}\mu \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \right).$$

2. Écrire l'expression de l'énergie mécanique E_m du système.

3. L'expression de E_m établie précédemment peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r),$$

où $U_{\text{eff}}(r)$ est l'énergie potentielle d'interaction effective de la particule fictive.

Donner l'expression de $U_{\text{eff}}(r)$. Comment prévoir qualitativement la nature bornée ou non de la trajectoire de la particule fictive ?

4. Écrire deux relations intégrales donnant les évolutions de r et θ en fonction du temps.

5. Comment résoudre alors complètement le problème à deux corps ?

II. CAS D'UNE INTERACTION NEWTONNIENNE ATTRACTIVE (D'APRÈS CAPES 2002)

Nous entendons par interaction newtonnienne, une force inversement proportionnelle au carré de la distance au centre de force, comme les interactions coulombiennes et gravitationnelles.

1. Satellisation sur une orbite circulaire :

1.1. Exprimer la vitesse $v(r)$, évaluée dans le référentiel géocentrique, d'un satellite terrestre en orbite circulaire de rayon r . On l'exprimera en fonction de \mathcal{G} , M_T et r .

1.2. En déduire la période $T(r)$ du mouvement du satellite.

1.3. Comparer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de gravitation d'un satellite en orbite circulaire.

1.4. On désigne par orbite basse une orbite dont l'altitude est faible devant le rayon terrestre. Évaluer numériquement la période et la vitesse d'un satellite décrivant une telle orbite. Que peut-on penser de la durée de vie d'un tel satellite ?

1.5. Qu'appelle-t-on satellite géostationnaire ?

1.6. Dans quel(s) domaine(s) d'application les satellites géostationnaires sont-ils particulièrement utiles ?

1.7. Déterminer l'orbite et calculer le rayon r_g de l'orbite d'un satellite géostationnaire.

1.8. Peut-on lancer un satellite géostationnaire à la verticale de Paris ?

1.9. Que peut-on répondre à un élève qui affirme :

- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est nulle car il est immobile.
- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est infinie parce qu'il est immobile.
- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est égale à 1 jour, soit $24\text{h}=86400\text{s}$.
- j'ai lu dans un site internet que la période de révolution d'un satellite géostationnaire vaut 86164s , mais je ne comprends pas pourquoi.

2. Vitesse de libération ou vitesse parabolique :

2.1. Calculer la vitesse minimale, notée v_p , laquelle il faudrait lancer un satellite soumis à la seule gravitation à partir de la surface de la Terre pour que celui-ci puisse aller à l'infini. Cette vitesse v_p est appelée vitesse de libération, ou vitesse parabolique ou encore seconde vitesse cosmique. Faire l'application numérique.

2.2. Comparer v_p à la vitesse de satellisation en orbite basse. Commenter l'influence d'une modification de la vitesse sur la trajectoire du satellite. Faire un schéma représentant l'allure des trajectoires du satellite par rapport au centre de la Terre en fonction des valeurs de la vitesse initiale du satellite.

2.3. Calculer la vitesse quadratique moyenne de l'oxygène et de l'azote de l'air pris à 293K et justifier le fait que l'atmosphère reste en grande partie piégée autour de la Terre.

III. ORBITE DE TRANSFERT (D'APRÈS CAPES 2002)

1. Problème du transfert : on admettra que l'énergie mécanique d'un satellite en orbite elliptique est de la forme

$$E_m = -\frac{K}{a},$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse trajectoire et K une constante dépendant de la masse de la Terre, de la masse du satellite et de \mathcal{G} .

1.1. En identifiant cette expression avec celle de l'énergie d'un satellite en orbite circulaire, déterminer K .

On souhaite faire passer un satellite d'une orbite circulaire basse ($r \approx R_T$) dans le plan équatorial de la Terre à une orbite géostationnaire. Pour cela, on communique une brusque variation de vitesse $\Delta\vec{v}_B$ du satellite en un point B de l'orbite basse, afin que le satellite se trouve sur une orbite elliptique (orbite de

transfert de Hohmann) tangente en B à l'orbite basse et tangente en un point H à l'orbite géostationnaire.

1.2. Faire un schéma soigné sur lequel on placera le centre de la Terre, les trajectoires circulaires basse et géostationnaire et l'orbite de transfert.

1.3. Déterminer le demi-grand axe a de l'orbite de transfert.

1.4. Déterminer la variation de vitesse $\Delta\vec{v}_B$ (norme et direction) convenable.

1.5. Lorsque le satellite parvient au point H , on lui communique une nouvelle brusque variation de vitesse $\Delta\vec{v}_H$ afin qu'il puisse passer de l'orbite de transfert à l'orbite géostationnaire. Déterminer la variation de vitesse $\Delta\vec{v}_H$ (norme et direction) convenable.

1.6. Les variations de vitesse Δv_B et Δv_H sont obtenues par la mise en action d'un moteur qui éjecte des produits de combustion avec une vitesse relative d'éjection u et un débit massique D . Si m_B , m_H et m_G sont respectivement la masse du satellite en orbite basse, sur l'orbite de transfert et sur l'orbite géostationnaire, on montre que

$$\Delta v_B = u \ln \left(\frac{m_B}{m_H} \right) \text{ et } \Delta v_H = u \ln \left(\frac{m_H}{m_G} \right).$$

Déterminer le rapport $\frac{m_G}{m_B}$.

Application numérique : $m_G = 1000 \text{ kg}$; $u = 3000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Quelle masse m_B faut-il satelliser en orbite basse ?

1.7. En pratique, l'orbite elliptique de transfert fait passer d'une orbite circulaire d'altitude 200km à l'orbite géostationnaire. Pourquoi ne choisit-on pas une orbite circulaire basse d'altitude inférieure ?

2. Frottements.

2.1. Pour un satellite en orbite basse elliptique, justifier que c'est au voisinage du périégée que les frottements sont les plus intenses.

2.2. On modélise les effets des frottements par une diminution de vitesse au passage au périégée. Montrer qualitativement que ce modèle conduit à une circularisation progressive de la trajectoire elliptique.

2.3. Pour un satellite en orbite quasi-circulaire, montrer par un bilan énergétique que les frottements aérodynamiques ont pour effet paradoxal d'accroître la vitesse.

2.4. N'y a-t-il pas contradiction entre ce résultat et celui de la question 8.2. ? Commenter.

IV. MÉCANIQUE STELLAIRE (D'APRÈS AGREG B 2006)

1. Lancement d'un satellite

On étudie le lancement d'un satellite artificiel à partir d'un point O de la surface terrestre.

1.1. Établir l'expression de la vitesse du point O dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g (assimilé ici à un référentiel galiléen) en fonction de la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles Ω , du rayon terrestre R_T et de la latitude du lieu λ .

1.2. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tirs suivants, lequel choisir de préférence ?

- Baïkonour au Kazakhstan $\lambda = 46^\circ$;
- Cap Canaveral aux USA $\lambda = 28.5^\circ$;
- Kourou en Guyane française $\lambda = 5.23^\circ$.

2. Champ de gravitation

On considère que la Terre de masse M_T et de rayon R_T a une répartition de masse sphérique et une densité volumique ρ .

2.1. Énoncer la loi de la gravitation universelle.

2.2. Montrer qu'en un point situé à une distance r du centre de la Terre ($r > R_T$), le champ de gravitation peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{G} = -\mathcal{G} \frac{M_T}{r^2} \mathbf{e}_r.$$

Définir le vecteur \mathbf{e}_r .

3. Lancement d'un satellite artificiel

3.1. Établir l'expression de l'énergie potentielle de gravitation du système {Terre-satellite} en fonction de l'altitude z du satellite par rapport au sol. On prend pour référence une énergie potentielle nulle à l'infini. En déduire l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur sa base de lancement dans le référentiel géocentrique.

3.2. On appelle ici vitesse de libération v_l , la vitesse verticale minimale qu'il faut communiquer initialement au satellite par rapport au sol, pour qu'il puisse se libérer de l'attraction terrestre. Donner l'expression de v_l . Calculer sa valeur numérique dans le cas où le satellite est lancé de la base de Kourou.

4. Satellite artificiel en orbite

On considère un satellite artificiel de masse m en mouvement circulaire autour de la Terre.

4.1. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme. Établir l'expression de la vitesse du satellite en fonction de son altitude ainsi que la troisième loi de Kepler liant la période T du satellite au rayon r de sa trajectoire.

4.2. Calculer le rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire et définir son plan de révolution.

4.3. Quelle énergie cinétique minimale faut-il communiquer au satellite pour qu'il échappe à l'attraction terrestre s'il est initialement en orbite autour de la Terre à l'altitude z ? A.N. : $z = 360\,000\text{ km}$; $m = 6\text{ t}$.

4.4. Soit un satellite d'énergie initiale E_{m0} . Son orbite est relativement basse et il subit donc les frottements des couches hautes de l'atmosphère. Il s'ensuit que l'énergie mécanique du satellite varie selon la loi

$$E_m = E_{m0}(1 + bt),$$

b étant un coefficient constant positif. On suppose que la trajectoire reste approximativement circulaire.

Préciser le signe de E_{m0} . Établir l'expression du rayon r et de la vitesse v du satellite en fonction du temps. Comparer les évolutions de r et de v ainsi que celles des énergies potentielles et cinétiques. Que devient l'énergie perdue ?

5. Sonde solaire

On cherche à positionner une sonde spatiale de masse m en un point P de manière à ce que, abandonnée en ce point, la sonde reste immobile par rapport au système {Terre-Soleil}. Les positions correspondant à cette situation sont appelées "points de Lagrange". Soient

- P_1 et P_2 les positions de Lagrange pour lesquelles le point P est aligné avec le centre T de la Terre et avec le centre S du Soleil, T et P se trouvant du même côté du Soleil ;
- x la distance entre la sonde et la Terre ;
- d la distance Terre-Soleil ;
- $k = M_S/M_T$.

La masse de la sonde est négligée par rapport aux masses de la Terre et du Soleil. On tiendra compte de la rotation de la Terre autour du Soleil.

5.1. Déterminer les valeurs des distances SP correspondant à ces positions. Faire un schéma. On considère que $x/d \ll 1$.

5.2. Quel est l'intérêt de placer un satellite en l'un de ces points ? Donner un exemple de ces satellites particuliers.

V. INTERACTIONS TERRE-LUNE ; PHÉNOMÈNES DE MARÉES [EXTRAIT AGREG B 1999]

On se propose dans cette partie d'étudier quelques phénomènes liés à l'action de la Lune sur la Terre. On note \mathcal{G} la constante de gravitation universelle. La Lune est considérée comme un objet ponctuel L de masse m , en interaction avec la Terre, sphère de rayon R . La distance de la Lune au centre de la Terre est notée d . Un point P sur la Terre est caractérisé par $CP = r$; $\text{angle}(\text{CL}, \text{CP}) = \theta$.

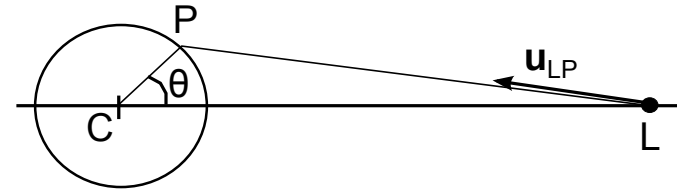


Figure 1: Système Terre-Lune

1. Exprimer le champ de gravitation \mathbf{g} exercé par la Lune au point P , en fonction de la masse de la Lune, de la distance LP , à l'aide du vecteur unitaire \mathbf{u}_{LP} dirigé de L vers P et à l'aide de la constante de gravitation universelle G .

2. En déduire le potentiel de gravitation Φ exercé par la Lune au point P , en fonction de la masse de la Lune, de la distance LP , et à l'aide de la constante de gravitation universelle G .

3. Exprimer LP en fonction de d , r , et de l'angle θ .

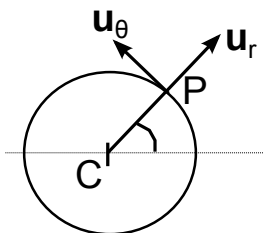
4. d étant très supérieur à r , établir une expression développée à l'ordre 2

en r/d du potentiel gravitationnel, sous la forme

$$\Phi = \Phi_0 + a(\theta)\frac{r}{d} + b(\theta)\frac{r^2}{d^2},$$

où $a(\theta)$ et $b(\theta)$ sont des fonctions de θ que l'on explicitera.

5. On définit sur la sphère Terre un vecteur unitaire radial \mathbf{u}_r porté par CP et un vecteur unitaire orthoradial \mathbf{u}_θ . Quel est le champ de gravitation \mathbf{g}_1 qui dérive du potentiel $a(\theta)r/d$? Montrer que ce champ est uniforme. Quelle est sa signification physique ?



6. Exprimer sur la base $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta$ le champ de gravitation \mathbf{g}_2 qui dérive du potentiel $b(\theta)r^2/d^2$; représenter le champ \mathbf{g}_2 pour $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$; comment cette figure permet-elle d'expliquer le fait qu'on observe, en première approximation, en une journée terrestre, 2 marées hautes et 2 marées basses ?

Quelle interaction supplémentaire faudrait-il prendre en compte pour expliquer les grandes marées (ou marées de vives eaux) et les petites marées (ou marées de mortes eaux) ?

Quelques conséquences des phénomènes de marées

7. La durée du jour terrestre a augmenté au cours des âges ; elle valait 22.2 heures il y a 300 millions d'années. Comment les phénomènes de marées peuvent-ils en être responsables ?

8. Les Romains avaient observé que le débit des sources varie journalièrement ; de même, le faisceau du grand collisionneur électron-positon (LEP)

du CERN, laboratoire européen de physique des particules à Genève, a une énergie qui varie journalièrement ; quel type de marée est-il responsable de ce phénomène ?

This work is licensed under a Creative Commons "Attribution-NonCommercial-NoD



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>