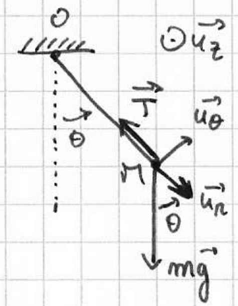
I) Le pendule simple (4)



On évalue le moment cinétique et les moments mécaniques en O.

Intérêt : $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{T}}(O) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ car $\vec{OM} \parallel \vec{T}$

$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{mg}}(O) = \vec{OM} \wedge \vec{mg}$

Or $\vec{OM} = l\vec{u_r}$; $\vec{mg} = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})$

$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{mg}}(O)$ $\vec{OM} \wedge \vec{mg} = \underline{mlg(-\sin\theta)\vec{u_z}}$. Et $\vec{L}(O) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}$
$= l\vec{u_r} \wedge m\, l\dot{\theta}\vec{u_\theta}$
$\underline{\vec{L}(O) = ml^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}}$

D'où, en appliquant le théorème du Moment Cinétique (TMC)

$\frac{d\vec{L}(O)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{mg}}(O) + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{T}}(O) \Rightarrow ml^2\ddot{\theta}\,\vec{u_z} = -mlg\sin\theta\,\vec{u_z}$

et on retrouve $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

II) Solide en rotation autour d'un axe fixe

1) Dans le cas a), le solide est soumis à trois actions mécaniques :

- Les forces de pesanteur. Leur moment est nul : $\mathcal{M}_{pes;\Delta} = 0$.
- Le moment moteur : $\mathcal{M}_{mot;\Delta} = +C$
- Le moment de frottement fluide : $\mathcal{M}_{frott;\Delta} = -h\omega$

Moment d'inertie J_Δ ; par définition : $L_\Delta = J_\Delta \omega$

TMC projeté sur Δ : $\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta \Rightarrow J_\Delta\dot{\omega} = C - h\omega$

soit $\dot{\omega} + \frac{h}{J_\Delta}\omega = \frac{C}{J_\Delta}$. On pose $\boxed{\tau = J_\Delta/h}$ et $\boxed{\omega_\infty = \frac{C}{J_\Delta}}$

alors $\boxed{\dot{\omega} + \frac{\omega}{\tau} = \omega_\infty}$

<u>Rappel</u> : Eq. diff. : $y' + ay = b$; $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

solution de l'équation sans second membre : $y' + ay = 0$

$\longrightarrow$ solution $y(t) = y_0 e^{-at}$

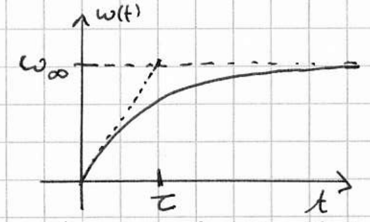
solution particulière : $y = b/a$.

$\longrightarrow$ solution générale : $y(t) = \frac{b}{a} + y_0 e^{-at}$.

y_0 est déterminé par les conditions initiales.

Dans notre cas : $\omega(t) = Ae^{-t/\tau} + \omega_\infty$; $A \in \mathbb{R}$. Or $\omega(0) = 0$ et $\omega(0) = A + \omega_\infty$.

D'où $A = -\omega_\infty$ soit $\boxed{\omega(t) = \omega_\infty(1 - e^{-t/\tau})}$



Semblable formellement à la charge d'un condensateur.

2) Dans la géométrie b). Le solide est soumis à 3 actions mécaniques.

→ le moment de la force de pesanteur : $\mathcal{M}_{pes;\Delta} = -mga\sin\theta$

→ le moment de la liaison pivot de l'axe de rotation : nul

→ le moment de frottement fluide : $\mathcal{M}_{frott;\Delta} = -h\dot{\theta}$

TMC $\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta\frac{d\dot{\theta}}{dt} = J_\Delta\ddot{\theta} = -h\dot{\theta} - mga\sin\theta$, d'où

$\ddot{\theta} + \frac{h}{J_\Delta}\dot{\theta} + \frac{mga}{J_\Delta}\sin\theta = 0$ On pose $\boxed{\omega_0^2 = \frac{mga}{J_\Delta}}$

et $\boxed{\tau = \frac{2J_\Delta}{h}}$

soit $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0}$

Equilibre : $\Sigma\mathcal{M}_\Delta = 0 \Rightarrow \theta_{eq} = 0$

3) Petites oscillations autour de $\theta = 0$: $\sin\theta \simeq \theta$

d'où $\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ → oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 et d'amortissement τ

(Cf TD4 sur les osc. harmonique.

(I) Équilibre d'une balance

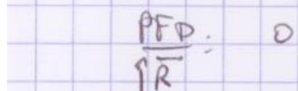
(1)

1/ oui, car le moment est proportionnelle à ℓ_1 (un petit poids peut compenser un grand poids si les distances sont convenablement choisies)

h_1 et h_2 n'interviennent pas (c'est uniquement le bras de levier).

2/ $\boxed{\ell_1 m_1 = \ell_2 m_2}$ $\boxed{m_1/m_2 = \ell_2/\ell_1}$

PFD : $0 = \vec{R} + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} \Rightarrow \boxed{R = (m_1+m_2)g}$.

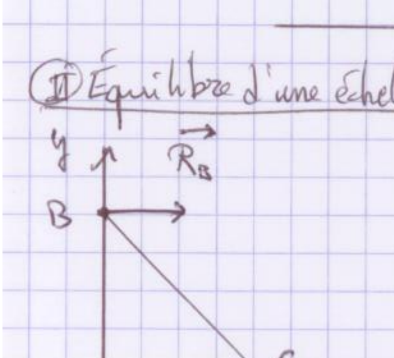


$R = m_2 g\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$

$R = m_2 g \frac{\ell_2}{\ell_1}$

(II) Équilibre d'une échelle

1/ $\vec{R_B} \perp$ à Oy car pas de frottements.



hyp : échelle en équilibre.

On pose $AG = xL$ et appliquons les théorèmes généraux de la mécanique :

PFD : $\begin{cases} R_B + R_{T_A} = 0 \\ -mg + R_{N_A} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{R_{N_A} = mg}$

TMC en A : $-mgxL\cos\theta + R_B L \sin\theta = 0$

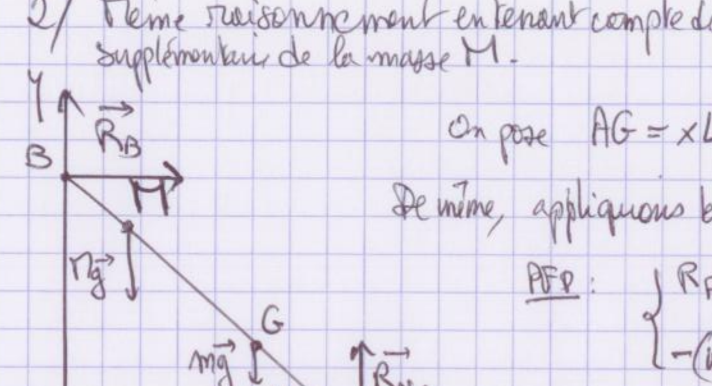
$\Rightarrow R_B = mgx\frac{1}{\tan\theta}$

$\Rightarrow R_{T_A} = -mgx\frac{1}{\tan\theta}$

Donc équilibre possible ssi $mgx\frac{1}{\tan\theta} < \mu mg$

soit $\boxed{\theta > \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\mu}\right)}$ ici $x = 1/3 \to \theta > \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{3\mu}\right)$

2/ Même raisonnement en tenant compte de l'action mécanique supplémentaire de la masse M. (2)



On pose $AG = xL$ et $AM = yL$

De même, appliquons les théorèmes généraux

PFD : $\begin{cases} R_B + R_{T_A} = 0 \\ -(m+M)g + R_{N_A} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{R_{N_A} = (m+M)g}$.

TMC en A : $-mgxL\cos\theta - MgyL\cos\theta + R_B L\sin\theta = 0$

$\Rightarrow R_B = (mx+My)g\frac{1}{\tan\theta}$

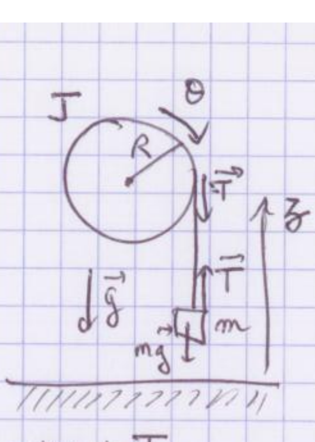
$\Rightarrow R_{T_A} = -(mx+My)g\frac{1}{\tan\theta}$

Donc équilibre possible ssi $(mx+My)g\frac{1}{\tan\theta} < \mu(m+M)g$

soit $\boxed{\theta > \mathrm{Arctan}\left(\frac{mx+My}{\mu(m+M)}\right)}$

EXPÉRIENCE DE TP

1) La masse m est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension du fil $\vec{T}$.



2) PFD à la masse m : $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg + T$.

TMC au cylindre : $J\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = RT$

Condition de non glissement de la corde $R\theta = -z$

Donc $T = \dfrac{J}{R}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{J}{R^2}\dfrac{d^2z}{dt^2}$

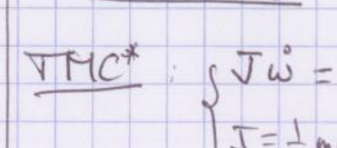
d'où $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg - \dfrac{J}{R^2}\dfrac{d^2z}{dt^2}$

soit $\left(m + \dfrac{J}{R^2}\right)\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg$

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{m}{m + J/R^2}\,g}$$ d'où $z(t) = \dots$ $\theta(t) = \dots$

III) MOUVEMENT D'UNE ROUE MOTRICE

Condition de Roulement Sans Glissement (RSG) :



$\vec{V_g}(I) = \vec{0}$

$= \vec{V}(I \in roue) - \underbrace{\vec{V}(I \in sol)}_{=\vec{0}}$

$= \vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OI}$

$= \dot{x}\,\vec{u_x} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{vmatrix} = (\dot{x} + a\Omega)\vec{u_x} \rightarrow \boxed{\dot{x} = -a\Omega}$

<u>TMC*</u> : $\vec{\mathcal{M}}_{ie}(O) = 0$; $\vec{\mathcal{M}}_{ic}(O) = \vec{0}$ car R^* est en translation

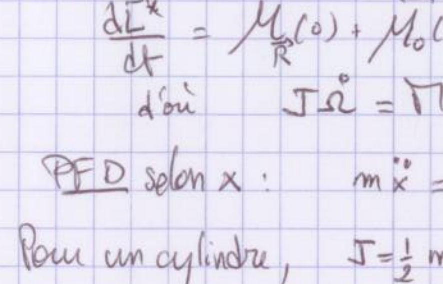
$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{R}}(O) + \vec{\mathcal{M}}_0(O)$ et $\vec{L}^* = J\vec{\Omega}$

d'où $J\dot{\Omega} = \Gamma_0 + R_T a$.

<u>PFD</u> selon x : $m\ddot{x} = R_T = -ma\dot{\Omega}$ (RSG) $\Rightarrow J\dot{\Omega} = \Gamma_0 - ma^2\dot{\Omega}$

Pour un cylindre, $J = \frac{1}{2}ma^2$ d'où finalement $\boxed{\dot{\Omega} = \frac{2}{3}\frac{\Gamma_0}{ma^2}}$

IV) Effet RETRO



<u>Glissement ?</u> : $\vec{V_g}(I) = \vec{V_g}(I \in roue) - \underbrace{\vec{V_g}(I \in sol)}_{=\vec{0}}$

$\vec{V_g}(I) = \vec{V}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI}$

$= \vec{V}(G) + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{vmatrix}$

$\boxed{\vec{V_g}(I) = (V + R\omega)\,\vec{u_x}}$

<u>à $t=0$</u>, $V_g = v_0 + R\omega_0 > 0$. Il y a donc glissement initialement.

(1) <u>Phase de glissement</u>

On a alors $\|\vec{R_T}\| = f\,\|\vec{R_N}\|$ et $\vec{R_T}$ s'oppose au mouvement

<u>PFD</u> : $\begin{cases} m\dot{v} = R_T \\ 0 = -mg + R_N \end{cases} \Rightarrow R_N = mg \Rightarrow \|R_T\| = fmg$

d'où $m\dot{v} = -fmg \Leftrightarrow \boxed{\dot{v} = -fg}$

d'où <u>$v(t) = v_0 - fgt$</u> $\quad$ $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}fgt^2$

<u>TMC*</u> : $\begin{cases} J\dot{\omega} = -fmgR \\ J = \frac{1}{2}mR^2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\dot{\omega} = -\frac{2fg}{R}}$

$\omega(t) = \omega_0 - \frac{2fg}{R}t$

<u>vitesse de glissement</u> : $V_g(I) = (V + R\omega)\vec{u_x}$

$\boxed{V_g(I)(t) = (v_0 + \omega_0 R - 3fgt)\,\vec{u_x}}$

le glissement prend fin à $\boxed{t_0 = (v_0 + \omega_0 R)/3fg}$

(2) <u>Phase de roulement sans glissement</u>

<u>Hyp</u> : $V_g(I) = 0 \Rightarrow \boxed{V = -R\omega}$

<u>PFD</u> : $m\dot{v} = R_T$

<u>TMC*</u> : $\frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} = R_T R \rightarrow R_T = -\frac{1}{2}m\dot{v} \Rightarrow \boxed{\dot{v} = 0}$

donc $v = v(t_0)$ et $\omega = \omega(t_0)$ $\forall t > t_0$ (car ensuite la condition de RSG est toujours vérifiée)

On a donc $V(t_0) = \frac{2v_0}{3} - \frac{\omega_0 R}{3}$

* si $v_0 > \frac{\omega_0 R}{2} \rightarrow V(t_0) > 0$

* si $v_0 < \frac{\omega_0 R}{2} \rightarrow V(t_0) < 0 \rightarrow$ effet rétro