★ TD5 Moment cinétique ★

I. Quelques rappels

I. Cas d'un point matériel

1. Théorème du moment cinétique
Donner la définition du moment cinétique en un point fixe O, associé à un point mobile M de masse m dans $\mathcal{R}$. Expliciter et démontrer le théorème du moment cinétique appliqué à ce point M. Ce théorème fournit-il plus d'informations que la Loi Fondamentale de la Dynamique ? Quand est-il utile ?

2. Cas d'un mouvement à force centrale
Dans le cas où la particule M subit une force centrale, c'est-à-dire que la force s'exerçant sur M s'écrit $\overrightarrow{f} = K(r)\overrightarrow{u_r}$, avec $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{OM}/||\overrightarrow{OM}||$, montrer que le mouvement de M a lieu dans un plan. En déduire l'expression de la constante des aires C et la loi des aires. En donner une interprétation.

II. Système de points matériels, solide

1. Théorème du moment cinétique pour un système de points matériels et pour un solide
Énoncer le théorème du moment cinétique dans le cas d'un système de points matériels et d'un solide.

2. Comparaison du TMC et du TRC
Y a-t-il encore redondance entre le théorème du moment cinétique et le théorème de la résultante cinétique (ou de la quantité de mouvement) pour ces systèmes ? Quelles informations permettent-ils, chacun, d'obtenir ?

3. Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ galiléen
Définir le moment cinétique d'un solide par rapport à cet axe fixe, on le note σ_Δ. On définira pour cela le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ, on le notera J_Δ. En déduire le théorème scalaire du moment cinétique par rapport à l'axe fixe Δ. Rappeler comment s'écrit l'énergie cinétique totale d'un solide en rotation autour d'un axe fixe en fonction de J_Δ et $\dot{\theta}$.

II. Problèmes de statique

I. Équilibre d'une balance

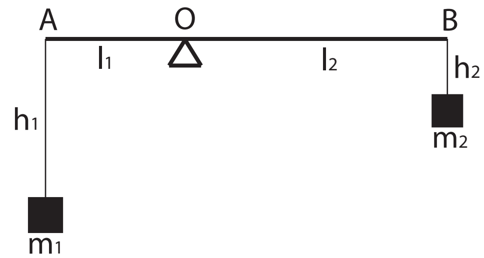

Figure 1: Équilibre d'une balance

Une balance est formée d'une tige s'appuyant en un point O. En A et B sont suspendues deux masses m_1 et m_2 (m_1 différent de m_2). On suppose également les distances $l_1 = OA$ et $l_2 = OB$ différentes, ainsi que les longueurs h_1 et h_2 des deux fils.

1. Le fait que les distances l_1 et l_2 soient différentes a-t-il une importante vis-à-vis de l'équilibre de la balance ? Qu'en est-il de h_1 et h_2 ?

kenneth.maussang@ens.fr

2. Ecrire la (les) condition(s) d'équilibre de la balance. En déduire la force s'exerçant au point O et le rapport m_1/m_2.

II. Équilibre d'une échelle

Une échelle de longueur $L = 4$m et de masse $m = 20\,$kg s'appuie sans frottement en B sur un mur vertical et en A sur un sol horizontal (de coefficient de frottement statique $\mu = 0.4$). Le centre de masse de l'échelle est situé au tiers inférieur de sa hauteur.

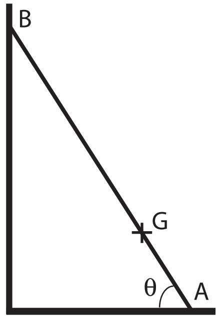

Figure 2: Équilibre d'une échelle

1. Jusqu'à quelle inclinaison peut-elle rester en équilibre ?

2. Jusqu'où un homme de masse M peut-il monter sur l'échelle inclinée de $\theta = 60°$ par rapport à l'horizontale ? Pour quelles valeurs de θ peut-il atteindre le haut de l'échelle ? Application numérique : $M = 80\,$kg.

III. Problèmes de dynamique

I. Le pendule simple (4)

On accroche une bille de masse m à un fil inextensible de longueur l, de masse négligeable, d'extrémité fixe O. On note θ l'angle entre le fil et la verticale, T la tension du fil.

Retrouver l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.

II. Solide en rotation autour d'un axe fixe

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ orienté, le solide ayant un moment d'inertie J_Δ (à définir) par rapport à cet axe.

Dans un premier temps, on considère la géométrie a) de la figure 3 : l'axe de rotation Δ est vertical, et le centre de masse G appartient à cet axe. On peut montrer facilement que dans ce cas là, le moment résultant des forces de pesanteur est nul. Supposons que la vitesse de rotation ω du solide est nulle à t=0, puis que celui-ci est soumis pour $t > 0$ à un couple moteur constant $\mathcal{M}_{\text{moteur},\Delta} = C > 0$ (avec les conventions d'orientation choisies). Supposons également que des frottements fluides s'exercent, dont le moment par rapport à Δ s'écrit $\mathcal{M}_{\text{frott},\Delta} = -h\omega$.

1. On suppose que $\vec{g}$ est colinéaire avec l'axe Δ. Trouver l'expression de $\omega(t) = \dot{\theta}$, la vitesse angulaire instantanée du solide par rapport à Δ.

On considère désormais la géométrie b), où cette fois l'axe de rotation Δ ne passe plus par le centre de masse G, et est à une distance a de Δ. On note toujours J_Δ le moment d'inertie de l'axe Δ. Il faut tenir compte désormais du moment exercé par la force de pesanteur $m\vec{g}$, dont le point d'application est G. On définit θ l'angle que forme le vecteur $\overrightarrow{OG}$ avec la vertical, où $O \in \Delta$. Le solide n'est plus soumis à un couple moteur, mais est toujours soumis à des frottements fluides modélisés selon $\mathcal{M}_{\text{frott},\Delta} = -h\omega$.

2. Pour θ quelconque, exprimer le moment mécanique exercé par le poids $m\vec{g}$. En déduire la position d'équilibre.

3. Établir l'équation du mouvement dans le cas général, et étudier les petites oscillations autour de la position d'équilibre.

kenneth.maussang@ens.fr

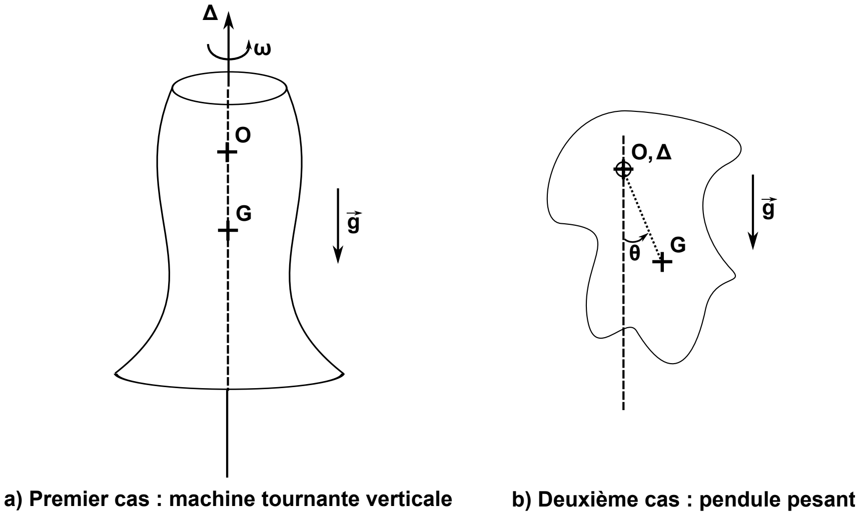

Figure 3: Étude de la rotation d'un solide autour d'un axe fixe. a) Rotation dans le cas où le centre de masse $G \in \Delta$, la pesanteur n'exerce pas de moment mécanique. b) Cas du pendule pesant.

III. Expérience de TP

On considère une masse m, attachée à une corde sans raideur de masse négligeable, elle même enroulée autour d'un cylindre de moment d'inertie J selon l'axe de rotation Δ (perpendiculaire au plan de la feuille). On note R le rayon du cylindre, et θ son angle de rotation orienté selon l'axe Δ. Le mouvement se fait sans glissement de la corde sur le cylindre. On néglige dans un premier temps les frottements.

1. Effectuer le bilan des actions mécaniques exercées sur la masse m.

2. Établir successivement les équations du mouvement de la masse m, puis du cylindre.

3. En déduire l'équation horaire de l'ordonnée $z(t)$.

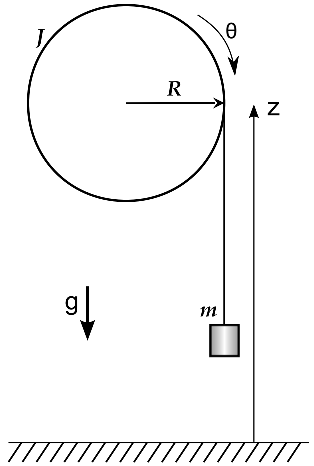

Figure 4: Étude du mouvement d'un cylindre

IV. Mouvement d'une roue motrice

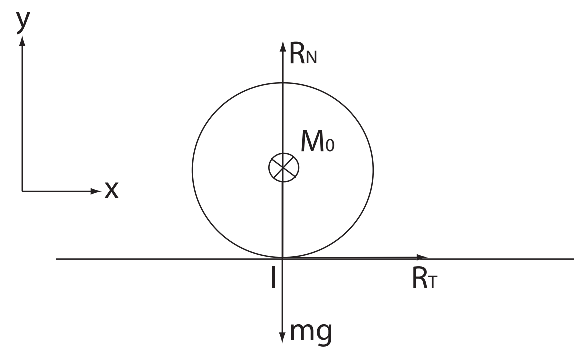

Figure 5: Mouvement d'une roue motrice

On considère une roue motrice de rayon a et de masse m. A partir de $t = 0$, on lui applique un couple moteur $\overrightarrow{M_0}$ constant. Le plan exerce sur la roue une force $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N}$ au point I de contact. On suppose que la roue roule sans glisser sur le plan. Trouver les caractéristiques du mouvement de la roue. Quel est le rôle joué par la force de frottement ?

V. Effet rétro

Un disque plan (M,R) est posé sur un plan horizontal avec un coefficient de frottement f. En $t = 0$, $\vec{v}(G) = V_0\vec{u}_x$ et $\vec{\Omega} = \omega_0\vec{u}_z$. Étudier le mouvement du disque et discuter suivant les valeurs de V_0 et ω_0. On se bornera ici au cas de l'effet rétro, où $V_0 > 0$ et $\omega_0 > 0$.

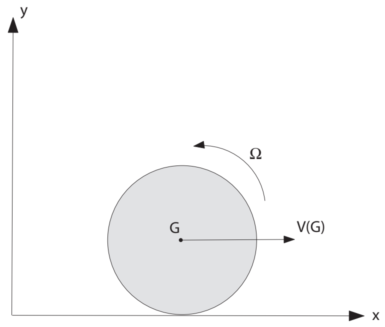

Figure 6: Effet rétro.