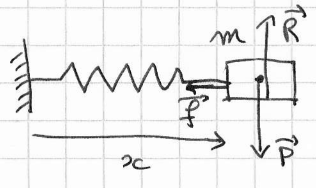
① Oscillateur harmonique libre

à l'équilibre, $x(t) = x_0$

1.1/



On néglige les frottements

- $\vec{f} = -k($
- réaction du support $\vec{R}$
- poids $\vec{P}$

$\left.\right\} \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

PFD projeté sur $\vec{u_x}$: $m\ddot{x} = -k(x - x_0)$

donc $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_0$. On pose $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$

Alors la solution générale est : $\boxed{x(t) = x_0 + A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$

solution particulière ⤴ ; ⤴ solution générale sans second membre

Avec les conditions aux limites

$\overset{\circ}{x}(t=0) = 0 = -A\omega_0 \sin(\omega t + \varphi) = \underbrace{-A\omega_0 \sin\varphi}_{=0} \Rightarrow \varphi = 0$

$x(t=0) : x_0 + a = x_0 + A \Rightarrow A = a$ d'où $\boxed{x(t) = x_0 + a\cos\omega_0 t}$

1.2) Évident car $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (isochronisme des oscillations pour un oscillateur harmonique).

1.3) $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ avec $v(t) = -a\omega_0 \sin\omega_0 t$

$E_c(t) = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 \sin^2\omega_0 t \longrightarrow \langle E_c \rangle = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 \underbrace{\langle \sin^2\omega_0 t\rangle}_{=1/2}$

soit $\boxed{\langle E_c \rangle = \frac{1}{4}ma^2\omega_0^2}$

Rappel : la moyenne sur une période de $\cos^2$ ou $\sin^2$ vaut $1/2$

démo : $\langle \cos^2\omega t\rangle = \langle \cos^2(2\pi \frac{t}{T})\rangle$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \cos^2\left(2\pi\frac{t}{T}\right)dt$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} \cos^2(2\pi u)\,du = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{+1/2}(1 + \cos(4\pi u))du$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-1/2}^{+1/2}\cos(4\pi u)\,du}_{\to 0} = 1/2$$

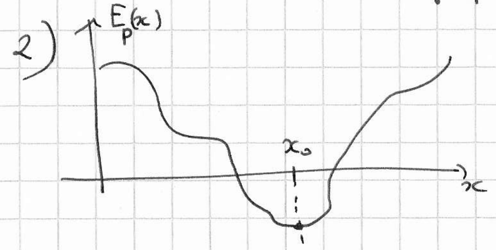
de même, $E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \cancel{C}^{\to 0}$ (on prend la constante C nulle, par choix de l'origine des énergies)

$E_p = \frac{1}{2}ka^2\cos^2\omega_0 t$; et $\langle E_p\rangle = \frac{1}{2}ka^2\langle\cos^2\omega_0 t\rangle = \frac{1}{4}ka^2$

et $k = m\omega_0^2$ d'où $\boxed{\langle E_p\rangle = \frac{1}{4}ma^2\omega_0^2}$. d'où $\boxed{\langle E_p\rangle = \langle E_c\rangle}$

Donc en valeur moyenne, l'énergie mécanique est équirépartie entre énergie potentielle et énergie cinétique.

2)



On fait un développement limité du potentiel autour de x_0, position d'équilibre

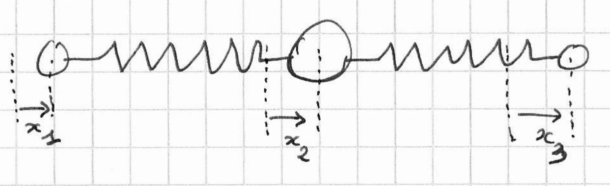
$$E_p(x) = E_p(x_0) + \underbrace{\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_0}}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_0}}_{\geq 0 \text{ car équilibre stable}}(x - x_0)^2 + \dots$$

On pose $k = \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_0} > 0$, alors

$E_p(x) = \underbrace{E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2}$ + corrections d'ordre 3 ou moins

↳ E_p d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_0}}$

3./1) Modélisation d'une molécule type CO_2 à géométrie linéaire ($O=C=O$)



⚠ $x_i \neq$ position absolue. x_i = écart à la position d'équilibre.

On note x_i l'écart à l'équilibre du centre de masse i.

PFD à chaque masse :

$$\boxed{\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1) \\ M\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1) \\ m\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = -k(x_3 - x_2) \end{cases}}$$

2)

On cherche les modes propres, où toutes les grandeurs oscillent à ω. Pour cela, on passe en notation complexe :

On pose $x_i = \mathrm{Re}\left(\underline{x_i}\, e^{-i\omega t}\right)$, et le système précédent devient

$$\begin{cases} -\omega^2 \underline{x_1} = \omega_0^2 (\underline{x_2} - \underline{x_1}) \\ -\omega^2 \underline{x_2} = \Omega^2 (\underline{x_3} - \underline{x_2}) - \Omega^2 (\underline{x_2} - \underline{x_1}) \\ -\omega^2 \underline{x_3} = -\omega_0^2 (\underline{x_3} - \underline{x_2}) \end{cases}$$

avec $\boxed{\omega_0^2 = k/m}$ $\boxed{\Omega^2 = k/M}$, on obtient alors, sous forme matricielle

$$(1) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 \\ 0 & \omega_0^2 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{pmatrix}}_{= N} \begin{pmatrix} \underline{x_1} \\ \underline{x_2} \\ \underline{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On aura une solution non triviale ssi $\det N = 0$

$$\Rightarrow (\omega^2 - \omega_0^2)\left[(\omega^2 - 2\Omega^2)(\omega^2 - \omega_0^2) - \Omega^2 \omega_0^2\right] - \omega_0^2 \Omega^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega^2 - \omega_0^2)\left((\omega^2 - 2\Omega^2)(\omega^2 - \omega_0^2) - 2\Omega^2 \omega_0^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega^2 - \omega_0^2)\left(\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2) - 2\Omega^2\omega^2 + \cancel{2\Omega^2 \omega_0^2} - \cancel{2\Omega^2 \omega_0^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\omega^2 - \omega_0^2)\, \omega^2 \left(\omega^2 - (\omega_0^2 + 2\Omega^2)\right) = 0}$$

<u>3 solutions</u> : $\omega = 0 \rightarrow$ pas intéressant

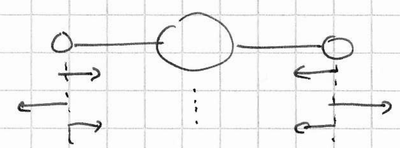
$\boxed{\omega_1 = \omega_0}$ ou $\boxed{\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + 2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$

mode 1 — mode 2

<u>Mode 1</u> : $\omega = \omega_0$. <u>En réinjectant dans (1)</u> ; on obtient

$$\boxed{\begin{cases} \underline{x_2} = 0 \\ \underline{x_3} = -\underline{x_1} \end{cases}}$$

MODE SYMETRIQUE

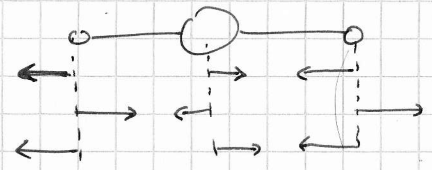


<u>Mode 2</u> : $\omega = \omega_0 \sqrt{1 + 2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 + 2\frac{m}{M}}$

alors on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{x_1} = \underline{x_3} \\ \underline{x_2} = -2\frac{m}{M}\underline{x_1} \end{cases}}$$

MODE ANTISYMETRIQUE



(II) Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

1/ ~~PFD~~ : $m \dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k(\vec{x}-\vec{x_0}) - \alpha \dfrac{d\vec{x}}{dt}$

projection sur Ox $\quad m\ddot{x} = -k(x-x_0) - \alpha\dot{x}$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_0 .$$

on pose $\boxed{\dfrac{\alpha}{m} = \dfrac{2}{\tau}}$ et $\boxed{\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}}$ $\Rightarrow (1)$ $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_0}$

2/ Eq. caractéristique de (1) : (Cf TD élec.) $\quad r^2 + \dfrac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = 4\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2\right).$$

(1) Si $1/\tau > \omega_0$ $\quad$ solutions réelles : $r_\pm = -\dfrac{1}{\tau} \pm \sqrt{\dfrac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}$

soit $x(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} + x_0$ d'où

$$\boxed{x(t) = x_0 + e^{-t/\tau}\left(A\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\tfrac{1}{\tau^2}-\omega_0^2}\,t\right) + B\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\tfrac{1}{\tau^2}-\omega_0^2}\,t\right)\right)}$$

$(A;B) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad$ Régime apériodique

(2) Si $1/\tau = \omega_0$ $\quad r = -1/\tau$

$$\boxed{x(t) = x_0 + (A + Bt)e^{-t/\tau}} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

Régime critique

(3) Si $1/\tau < \omega_0$ $\quad r_\pm = -1/\tau \pm i\sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$

On pose $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}}$ $\Rightarrow r_\pm = -1/\tau \pm i\omega$

Alors $\boxed{x(t) = x_0 + (A\sin\omega t + B\cos\omega t)e^{-t/\tau}}$ $\quad (A;B) \in \mathbb{R}^2$

régime pseudo-périodique

3/ Cas d'un frottement avec faible amortissement

$$1/\tau \ll \omega_0$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{1}{\tau^2}}$ pseudo pulsation ; $\quad T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}$ pseudopériode

$x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$

$x(t) = x_0 + (A\sin\omega t + B\cos\omega t)e^{-t/\tau}$

$x(0) = x_0 + B \longrightarrow \boxed{B = 0}$

$\dot{x}(t) = +Ae^{-t/\tau}\left(\omega\cos\omega t - \dfrac{1}{\tau}\sin\omega t\right).$

Or $\omega \gg 1/\tau \Rightarrow \dot{x}(t) \simeq A\omega\cos\omega t\, e^{-t/\tau}$

$\dot{x}(0) = A\omega = v_0$

d'où $\boxed{x(t) = x_0 + \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\,e^{-t/\tau}}$

Extrema : $\dfrac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow A e^{-t/\tau}\left(\omega\cos\omega t - \dfrac{1}{\tau}\sin\omega t\right) = 0$

$t_n = \dfrac{\pi}{\omega}(n+\tfrac{1}{2}) + \delta_n$ $\quad n \in \mathbb{N}$. $\quad \delta_n \ll 2\pi$.

$\cos\omega t_n = \cos(\pi n + \pi/2 + \delta_n) = (-1)^{n+1}\sin\delta_n \simeq (-1)^{n+1}\delta_n$

$\sin\omega t_n = \sin(\pi n + \pi/2 + \delta_n) = (-1)^n\cos\delta_n \simeq (-1)^n$

à l'ordre 1

Donc à l'ordre 1, t_n sera un extrema si

$$(-1)^n\left(-\omega\delta_n - \frac{1}{\tau}\right) = 0 \Rightarrow \delta_n = -\frac{1}{\omega\tau}$$

extrema en $\boxed{t_n = \dfrac{\pi}{\omega}(n + 1/2) - \dfrac{1}{\omega\tau}}$

$n \in \mathbb{N}$

4) Décrément logarithmique $\delta = \ln\left(\dfrac{x(t)-x_0}{x(t+T)-x_0}\right)$ où T est la pseudopériode

$$x(t) = x_0 + \left(A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) + B\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)e^{-t/\tau}$$

$$\frac{x(t)-x_0}{x(t+T)-x_0} = e^{+T/\tau} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{T}{\tau}}$$

5) $E = E_p + E_c$

$$E_p = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right)^2 e^{-2t/\tau}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\omega\left(A\cos\omega t - B\sin\omega t\right) - \frac{1}{\tau}\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right)\right]^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

si $\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow E_c \simeq \frac{1}{2}\underbrace{m\omega^2}_{=k}\left(A\cos\omega t - B\sin\omega t\right)^2 e^{-2t/\tau}$

donc $E = \frac{1}{2}k\left(\underbrace{\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right)^2 + \left(A\cos\omega t - B\sin\omega t\right)^2}_{=A^2+B^2}\right)e^{-2t/\tau}$

On pose $E_0 = E(t=0)$, alors $\boxed{E(t) \simeq E_0\, e^{-2t/\tau}}$ décroissance exponentielle

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{\tau}E(t)} \qquad \Delta E = E(t+T) - E(t) = \underbrace{E_0 e^{-2t/\tau}}_{E(t)}\left(e^{-\frac{2T}{\tau}} - 1\right)$$

soit $\boxed{\dfrac{\Delta E}{E} \simeq -\dfrac{2T}{\tau} = -2\delta}$ perte d'énergie relative sur une période.

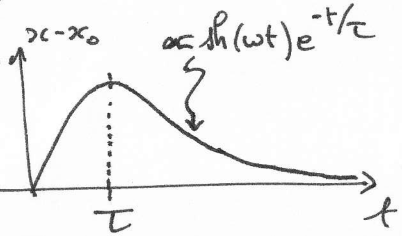
6) Régime très amorti : $x(t) = x_0 + e^{-t/\tau}\left(A\,\mathrm{ch}\,\omega t + B\,\mathrm{sh}\,\omega t\right)$

$x(0) = x_0 \Rightarrow \boxed{A=0}$; $x(t) = x_0 + B\,\mathrm{sh}(\omega t)\,e^{-t/\tau}$

$\dot{x}(t) = Be^{-t/\tau}\left(\omega\,\mathrm{ch}\,\omega t - \frac{1}{\tau}\mathrm{sh}\,\omega t\right)$

$\dot{x}(0) = \omega B = v_0 \Rightarrow \boxed{B = v_0/\omega}$

d'où $\boxed{x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\omega}\mathrm{sh}(\omega t)\,e^{-t/\tau}}$



x_{max} ? $\rightarrow \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x_{max}} = 0 = \dfrac{v_0}{\omega}\left(\omega\,\mathrm{ch}\,\omega t_m - \frac{1}{\tau}\mathrm{sh}\,\omega t_m\right)e^{-t/\tau}$

$\hookrightarrow \mathrm{th}(\omega t_m) = \omega\tau \ll 1$

donc $\mathrm{th}(\omega t_m) \simeq \omega t_m = \omega\tau \longrightarrow \boxed{t_m \simeq \tau}$

7) Régime critique

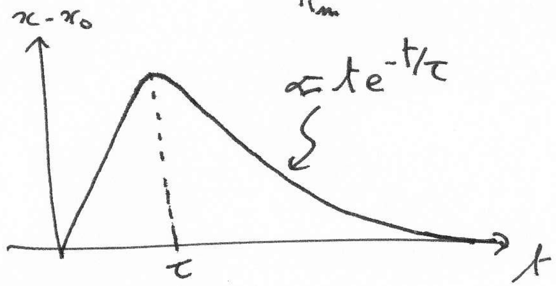
$$x(t) = (A+Bt)e^{-t/\tau} + x_0$$

$x(0) = x_0 \Rightarrow \boxed{A=0}$

$\dot{x}(t) = \left(-\frac{A}{\tau} - \frac{Bt}{\tau} + B\right)e^{-t/\tau} = B\left(1-\frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$

$\dot{x}(0) = B = v_0$ d'où $\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t\, e^{-t/\tau}}$

x_{max} en t_m : $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t_m} = 0 = B\left(1-\frac{t_m}{\tau}\right)e^{-t/\tau} \longrightarrow \boxed{t_m = \tau}$



temps de retour minimal
$\Rightarrow$ application aux amortisseurs.

en effet :

$$\frac{(x(t)-x_0)_{amorti}}{(x(t)-x_0)_{critique}} = \frac{\frac{v_0}{\omega}\mathrm{sh}(\omega t)\,e^{-t/\tau}}{v_0\, t\, e^{-t/\tau}} = \frac{\mathrm{sh}\,\omega t}{\omega t} > 1 \ \forall t$$

Le régime critique est le régime de retour à l'équilibre le plus rapide.

V) Oscillateur harmonique excité

1) $m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k(\vec{x}-\vec{x_0}) - \alpha\frac{d\vec{x}}{dt} + F\cos\omega t\,\vec{u_x}$

Projection sur Ox : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = kx_0 + F\cos\omega t$

pour $\boxed{\tau = \frac{2m}{\alpha}}$ et $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2(x-x_0) = \frac{F}{m}\cos\omega t}$ (1)

2) Passage en complexe : $x = \mathrm{Re}(\underline{x}\,e^{-i\omega t}) + x_0$

(1) devient $-\omega^2\underline{x} + \frac{2}{\tau}(-i\omega)\underline{x} + \omega_0^2\underline{x} = \frac{F}{m}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\underline{x} = \frac{F/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega/\tau}}$

$X_0 = |\underline{x}| \Rightarrow$ $\boxed{X_0 = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}}$

$\phi = \mathrm{Arg}\,\underline{x} = -\mathrm{Arg}\,\frac{1}{\underline{x}}$

$$\boxed{\begin{cases} \sin\phi = \dfrac{2\omega/\tau}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}} \\[2ex] \cos\phi = \dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}} \end{cases}}$$

3) X_0 est max $\Leftrightarrow$ X_0^2 est max $\Leftrightarrow$ $(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}$ est min

On pose $u = \omega^2$, $u_0 = \omega_0^2$ $\rightarrow$ $f(u) = (u-u_0)^2 + 4u/\tau^2$ est minimum.

Donc $\frac{df}{du} = 0$: $2(u-u_0) + \frac{4}{\tau^2} \Rightarrow u = u_0 - 2/\tau^2$

soit $\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - 2/\tau^2}$ On aura une résonance en amplitude seulement si $\omega_0^2 > 2/\tau^2$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\omega_0\tau > \sqrt{2}}$ condition d'existence d'une résonance en amplitude.

Alors on aura la fréquence de résonance : $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{2}{(\omega_0\tau)^2}}}$

4) $\underline{v} = -i\omega\underline{x} \longrightarrow$ $\boxed{\underline{v} = \frac{-i\omega F/m}{(\omega_0^2-\omega^2) - 2i\omega/\tau}}$

D'où l'on déduit $V_0 = |\underline{v}|$: $\boxed{V_0 = \frac{\omega F/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2) + 4\frac{\omega^2}{\tau^2}}}}$

et $\psi = \arg(\underline{v})$:

$$\boxed{\begin{cases} \sin\psi = \dfrac{(\omega^2-\omega_0^2)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}} \\[2ex] \cos\psi = \dfrac{2\omega/\tau}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}} \end{cases}}$$

Résonnance en vitesse :

V_0 max $\Leftrightarrow$ $f(u)$ max

avec $u = \omega^2$, $u_0 = \omega_0^2$ et

$f(u) = \left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{(u_0-u)^2 + \frac{4u}{\tau^2}}}\right)^2$

$\frac{df}{du} = 0 \Rightarrow (u_0-u)^2 + \frac{4u}{\tau^2} - u(-2(u_0-u) + 4/\tau^2) = 0$

$\Leftrightarrow (u_0-u)^2 + \cancel{\frac{4u}{\tau^2}} + 2(u_0-u)u = 0$

$\Leftrightarrow (u_0-u)(u_0-u+2u) = 0 \Rightarrow \boxed{u = u_0}$

$\boxed{\text{On a donc \underline{toujours} résonance en vitesse à } \boxed{\omega_r = \omega_0}}$

5.1/ FACTEUR DE QUALITÉ EN RÉGIME LIBRE

a/ τ et ω_0^{-1} $\Rightarrow$ $\boxed{Q = \frac{1}{2}\tau\omega_0}$ (origine du facteur 2, voir c/)

b/ $\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0\tau} \rightarrow \boxed{\delta = \frac{\pi}{Q}}$

c/ $Q \gg 1$ $\quad \frac{\Delta E}{E} = -2\frac{T}{\tau} = -\frac{2\pi}{Q}$ énergie relative perdue par période

$\boxed{\Delta E/E = -\frac{2\pi}{Q}}$ d'où $Q = E \times \frac{2\pi}{|\Delta E|}$

5.2/ Régime forcé $\quad Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} \quad \omega_0\tau \gg 1$.

$$X_0 = \frac{F}{m}\frac{1}{\left((\omega_0^2-\omega^2) + \frac{4\omega^2}{\tau^2}\right)^{1/2}}$$ max en $\omega_r^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{2}{(\omega_0\tau)^2}\right)$

On pose $u = \omega^2\tau^2 \quad u_0 = \omega_0^2\tau^2$

On a alors $\boxed{u_r = u_0 - 2}$ on pose $u = u_0 - 2 + \delta$

On a alors $|X_0|^2 = \frac{F^2\tau^4}{m^2}\frac{1}{4u + (u-u_0)^2}$

$$|X_0|^2 = \frac{F^2\tau^2}{m^2}\frac{1}{\delta^2 + 4(u_0-1)}$$

$$\left|\frac{X_r}{2}\right|^2 = |X_0|^2 \Rightarrow \frac{1}{\delta_\pm^2 + 4(u_0-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{4(u_0-1)}$$

$\Rightarrow \boxed{\delta_\pm = \pm 2\sqrt{u_0 - 1}} \quad \delta \simeq \pm 2\sqrt{u_0}$ car $u_0 \gg 1$

soit $\delta = \pm 2\omega_0\tau$.

$u = \omega^2\tau^2 \rightarrow \quad \omega_\pm^2\tau^2 = \omega_0^2\tau^2 - 2 \pm 2\omega_0\tau$

$$\omega_\pm^2 = \omega_0^2\left(1 \pm \frac{2}{\omega_0\tau} - \frac{2}{(\omega_0\tau)^2}\right)$$

$$\hookrightarrow \omega_\pm \simeq \omega_0\left(1 \pm \frac{1}{\omega_0\tau}\right)$$

Donc $\boxed{\Delta\omega = \frac{2}{\tau}}$ d'où $\boxed{\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{2}\omega_0\tau}$

soit $\boxed{Q = \frac{1}{2}\omega_0\tau}$

5.2.b/ $V_r = \frac{F}{m}\frac{\omega_0}{\sqrt{4\omega_0^2/\tau^2}} = \frac{F}{m}\frac{\tau}{2}$

$V(\omega_\pm)^2 = \frac{V_r^2}{2} \iff \frac{\tau^2}{2\cdot 4} = \frac{\omega_\pm^2}{(\omega_0^2-\omega_\pm^2)^2 + \frac{4\omega_\pm^2}{\tau^2}}$

$\iff (\omega_0^2-\omega_\pm^2)^2 + \frac{4}{\tau^2}\omega_\pm^2 - \frac{8}{\tau^2}\omega_\pm^2 = 0$

$\iff (\omega_0^2-\omega_\pm^2)^2 = \frac{4}{\tau^2}\omega_\pm^2 \iff \omega_0^2 - \omega_\pm^2 = \pm\frac{2}{\tau}\omega_\pm$

$\iff \omega_\pm^2 \pm \frac{2}{\tau}\omega_\pm - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{4}{\tau^2} + 4\omega_0^2$

$$\omega_\pm = \pm\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2}$$

solutions positives : $\omega_+ = \frac{1}{\tau} + \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2}$

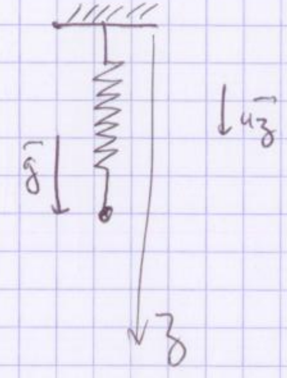
$$\omega_- = -\frac{1}{\tau} + \sqrt{\omega_0^2 + (1/\tau)^2}$$

donc $\Delta\omega = 2/\tau$

soit $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{2}\omega_0\tau}$

6/ Cf cours

Oscillateur vertical



1/ force exercée par le ressort :

$$\vec{f} = -k(z-l_0)\vec{u_z}$$

$\Delta l = 3\,cm$ compense le poids $m\vec{g}$.

donc $k\Delta l = mg$

$$\boxed{k = \frac{mg}{\Delta l}} \quad \underline{A.N.} \quad k = \frac{10^{-2} \cdot 10}{3 \cdot 10^{-2}}$$

$$\boxed{k = 3{,}3\ N.m^{-1}}$$

2/ PFD à la masse m :

$$\underline{m\frac{d^2z}{dt^2} = +mg - k(z-l_0)}.$$

La solution indépendante du temps $z_{éq}$: $mg - k(z_{éq} - l_0) = 0$.

$$\boxed{z_{éq} = l_0 + \frac{mg}{k}}$$

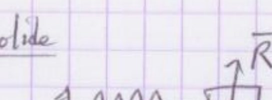
Alors $m\frac{d^2z}{dt^2} = -k(z - z_{éq}) \Rightarrow \boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2(z - z_{éq}) = 0}$

avec $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$

3/ $\boxed{z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + z_{éq}}$

$(A ; \varphi)$ déterminés par les conditions initiales.

III Oscillateur amorti par frottement solide ①



1/ Cf cours

2/ $m \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(x-x_0) + f_{frott}$

On pose $\varepsilon = \mathrm{sgn}(\dot{x})$ si $\dot{x} > 0$, $f_{frott} = -\mu m g = -\varepsilon \mu m g$

$\dot{x} < 0$, $f_{frott} = +\mu m g = -\varepsilon \mu m g$

d'où $\ddot{x} + \dfrac{k}{m} x = \dfrac{k}{m} x_0 - \varepsilon \mu g$. pour $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \left(x_0 - \varepsilon \frac{\mu g}{\omega_0^2} \right)}.$$

3/ solution générale : $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_0 - \varepsilon \dfrac{\mu g}{\omega_0^2}$

$x(0) = x_0 + a > 0$ $\dot{x}(0) = 0$

1^re^ phase : $\varepsilon < 0 \Rightarrow x(t) = x_0 + \dfrac{\mu g}{\omega_0^2} + \left(a - \dfrac{\mu g}{\omega_0^2}\right) \cos \omega_0 t$

pour $0 < t < t_1$

avec $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_0}$, $\dot{x}(t_1) = 0$; $x(t_1) = x_0 + 2\dfrac{\mu g}{\omega_0^2} - a$

$t > t_1$ $\varepsilon > 0$ $x(t) = A\cos \omega_0 t + x_0 - \dfrac{\mu g}{\omega_0^2}$

$x(t_1) = x_0 + \dfrac{2\mu g}{\omega_0^2} - a = -A + x_0 - \dfrac{\mu g}{\omega_0^2}$

$\Rightarrow A = a - \dfrac{3\mu g}{\omega_0^2}$

$x(t) = \left(a - \dfrac{3\mu g}{\omega_0^2}\right) \cos \omega_0 t + x_0 - \dfrac{\mu g}{\omega_0^2}$

et ce jusqu'à $t_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

etc ...

Résultat général : on intuite un résultat de la forme : ②

$t_n = n \dfrac{\pi}{\omega_0}$ $n \in \mathbb{N}$, $\underline{A_n = a - (2n-1) \dfrac{\mu g}{\omega_0^2}}$

pour $t \in [t_n ; t_{n+1}]$ si n est pair, $\varepsilon < 0$

donc $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \left(x_0 + \dfrac{\mu g}{\omega_0^2} \right)$

$x(t) = a_{n+1} \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_0 + \dfrac{\mu g}{\omega_0^2}$

$\dot{x}(t_n) = 0$
$x(t_n) = a_n + x_0 \Rightarrow$ $+ a_{n+1} + x_0 + \dfrac{\mu g}{\omega_0^2} = a_n + x_0 - \dfrac{\mu g}{\omega_0^2}$

puis, pour $t \in [t_{n+1} ; t_{n+2}]$ $\varepsilon > 0$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \left(x_0 - \dfrac{\mu g}{\omega_0^2} \right)$

$x(t) = a_{n+2} \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_0 - \mu g / \omega_0^2$

$x(t_{n+1}) = -a_{n+2} + x_0 - \mu g / \omega_0^2 = -a_{n+1} + x_0 + \dfrac{\mu g}{\omega_0}$

etc ...

donc $\boxed{a_{n+1} = a_n - \dfrac{2\mu g}{\omega_0^2}} \Rightarrow a_n = a - (2n-1) \dfrac{\mu g}{\omega_0^2}$

On obtient pour $t \in [t_n ; t_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{x(t) = \left(a - (2n-1) \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right) \cos \omega_0 t + x_0 + (-1)^n \frac{\mu g}{\omega_0^2}}$$

tant que $a - (2n-1) \dfrac{\mu g}{\omega_0^2} > 0 \rightarrow n_{max}$

à n_{max}, la masse m va s'arrêter une fois arrivée

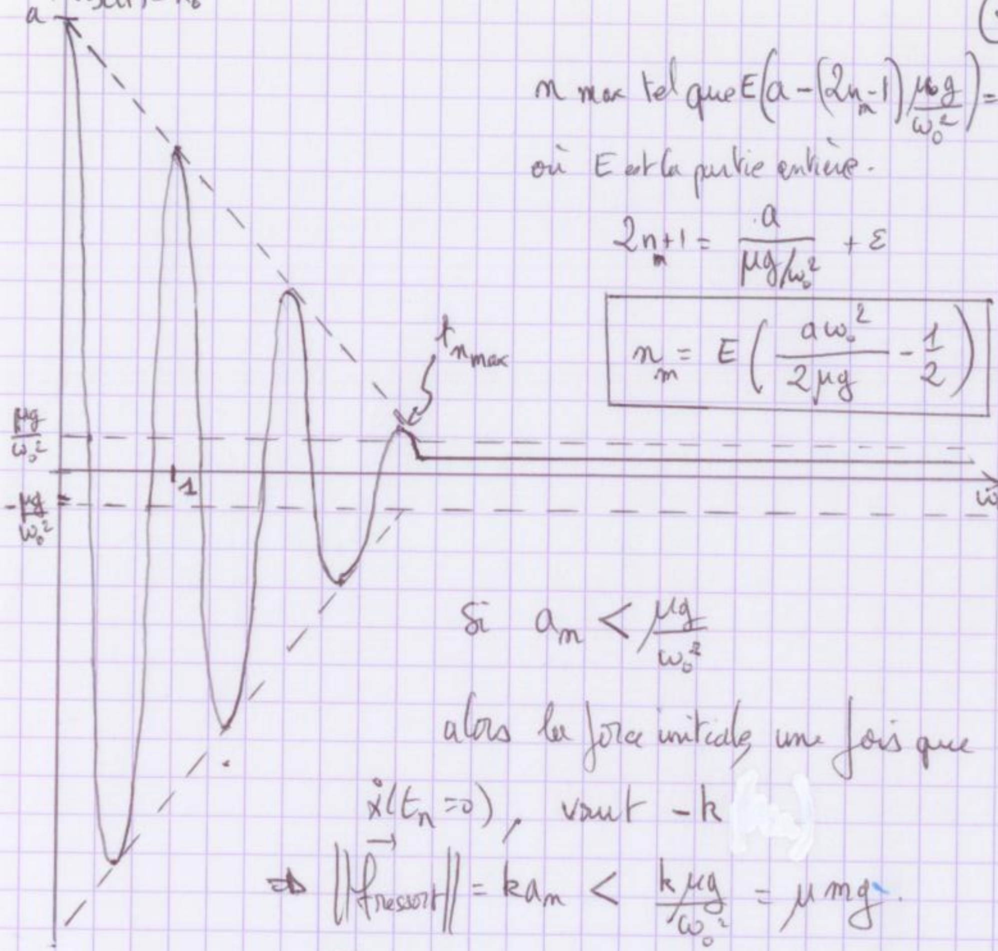
car les frottements sont trop importants.

n max tel que $E\left(a - (2n_m - 1)\frac{\mu g}{\omega_0^2}\right) = 0$

où E est la partie entière.

$$2n_m + 1 = \frac{a}{\mu g/\omega_0^2} + \varepsilon$$

$$\boxed{n_m = E\left(\frac{a\omega_0^2}{2\mu g} - \frac{1}{2}\right)}$$



Si $a_m < \frac{\mu g}{\omega_0^2}$

alors la force initiale une fois que $\dot{x}(t_n = 0)$, vaut $-k$

$\Rightarrow \|\vec{f}_{ressort}\| = k a_m < \frac{k \mu g}{\omega_0^2} = \mu m g$.

Donc si $\|\vec{f}_{ressort}\| < \mu m g \Rightarrow$ pas de mouvement (frottement trop fort)

(Rappel, si mvt, alors $\|\vec{R}_T\| = \mu m g$).

Une fois arrêté, le mobile ne bougera plus.