TD4 L'oscillateur harmonique

I. Oscillateur harmonique libre

1. On considère une masse m soumise à une force de rappel horizontale exercée par un ressort de raideur k et de longueur à vide x_0. On néglige les frottements.

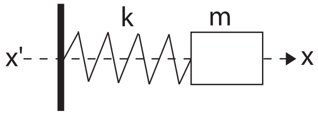

Figure 1: Masse m reliée à un ressort de raideur k

1.1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la position x de m (x est à définir). En déduire $x(t)$, si l'on suppose qu'à l'instant $t = 0$, on abandonne m sans vitesse initiale, après avoir tiré sur le ressort d'une longueur a.

1.2. Vérifier que la période des oscillations ne dépend pas de a.

1.3. Calculer la moyenne sur une période de l'énergie cinétique de m et de l'énergie potentielle associée à la force de rappel. Vérifier que l'énergie mécanique se conserve, et qu'elle est également répartie entre énergie cinétique et énergie potentielle.

2. On considère plus généralement une masse m soumise à l'action d'une force dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x)$. On suppose que cette énergie potentielle admet un minimum local en x_0. Montrer qu'on peut modéliser le mouvement de m autour de x_0 par celui d'un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation en fonction des données du problème.

3. On considère le système suivant, formé de trois masses dont les deux extrêmes sont identiques, et qui sont reliées par deux ressorts identiques :

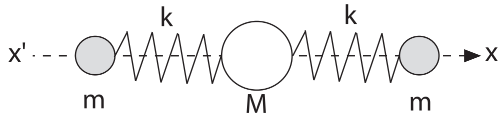

Figure 2: Système de trois masses couplées par des ressorts de raideur k

On néglige la pesanteur, et on ne considère que le déplacement suivant l'axe x.

3.1. Déterminer les équations différentielles vérifiées par les centres de gravités x_1, x_2 et x_3 des trois masses, où les x_i désignent l'écart à la position d'équilibre.

3.2. On cherche des solutions des équations du mouvement où les trois masses oscillent à la même fréquence, c'est-à-dire les modes propres. Déterminer les deux fréquences possibles pour des mouvements de ce type. Comment oscillent les masses pour chacun des deux modes propres ? Que modélise ce système ?

II. Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

Expérimentalement, on constate que l'amplitude d'un oscillateur comme celui décrit en A.1. décroît en fonction du temps. On ajoute alors au modèle une force de frottement visqueux s'écrivant $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$ agissant sur m et qui permet de rendre compte du phénomène.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la position x de m.

2. Écrire l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle et distinguer trois types de mouvements selon un critère à préciser.

3. Étudier le régime faiblement amorti : définir la pseudo-pulsation du mouvement et sa pseudo-période, donner l'expression de $x(t)$ si l'on suppose que $x(0) = x_0$ (x_0 étant la position d'équilibre du ressort) et que la vitesse initiale vaut v_0. Déterminer les extrema de la position. Faire un croquis.

4. Définir le décrément logarithmique δ, le relier à la pseudo-période et à $\tau = 2m/\alpha$.

5. Évaluer la dépendance de l'énergie totale de l'oscillateur en temps, la perte d'énergie par unité de temps, puis sur une période dans le cas d'un amortissement très faible.

6. Étudier le régime très amorti : expression de $x(t)$ avec les mêmes conditions initiales que dans la question 3. Faire un croquis.

7. Étudier le régime critique : expression de $x(t)$ avec les mêmes conditions initiales que dans la question 3. Faire un croquis. Quel est son intérêt par rapport au régime très amorti ?

III. Oscillateur harmonique excité

On considère une masse m soumise à une force de rappel due à un ressort (constante de raideur k, longueur à vide x_0), à une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$ et à une force excitatrice sinusoïdale $\overrightarrow{F} = F\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la position x de m. On posera $\omega_0^2 = k/m$ et $\tau = 2m/\alpha$.

2. Résoudre cette équation : mettre en évidence un régime transitoire, et donner la solution forcée en utilisant la notation complexe. En déduire l'amplitude X_0 des oscillations de m et le déphasage ϕ de l'oscillateur par rapport à la force excitatrice.

3. Mettre en évidence une "résonance en amplitude" pour une valeur de ω à déterminer. Cette résonance existe-t-elle toujours ?

4. Déterminer la vitesse de m en régime forcé, on notera V_0 l'amplitude de la vitesse des oscillations et ψ son déphasage par rapport à la force excitatrice. Mettre en évidence une "résonance en vitesse". Est-elle située à la même fréquence que la résonance en amplitude ? Existe-t-elle toujours ?

5. Les différentes définitions du facteur de qualité Q :

5.1. Définitions en régime libre :

5.1.a) Définition dimensionnelle : Q peut être défini comme le rapport entre deux temps caractérisant l'oscillateur et le milieu dans lequel il se déplace. Quels sont ces deux temps et à quoi correspondent-ils respectivement ?

5.1.b) Dans le cas où $Q >> 1$, quelle est la relation qui existe entre le facteur de qualité Q et δ, le décrément logarithmique qui caractérise la décroissance de l'amplitude des oscillations en régime pseudo-périodique (voir TD *Oscillateur harmonique libre avec ou sans frottements*) ?

5.1.c) Définition énergétique : dans le cas où $Q >> 1$, écrire le facteur de qualité Q comme le rapport de deux énergies que l'on précisera.

5.2. Définitions en régime forcé :

5.2.a) Résonance en amplitude : quand celle-ci existe, on définit usuellement Q par : $Q = \omega_r/\Delta\omega$ où ω_r est la valeur de la pulsation à la résonance et $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ où ω_+ et ω_- sont définies par $X_0(\omega_+) = X_0(\omega_-) = X_r/\sqrt{2}$ (avec $X_r = X_0(\omega_r)$). Montrer que, lorsque cette résonance est de bonne qualité ($\omega_0\tau >> 1$) on retrouve l'expression habituelle de Q.

5.2.b) Résonance en vitesse : on peut définir Q de la même manière par : $Q = \omega_r/\Delta\omega$ (ici $\omega_r = \omega_0$) avec $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$, où ω_+ et ω_- sont définies par $V_0(\omega_+) = V_0(\omega_-) = V_r/\sqrt{2}$ (avec $V_r = V_0(\omega_r)$). Montrer que, cette fois, aucune approximation n'est nécessaire pour retrouver l'expression habituelle de Q.

6. Faire le lien entre les différents comportements de l'oscillateur en régimes libre et forcé, notamment en fonction de la valeur de Q.

IV. Oscillateur vertical

On considère un ressort vertical de masse négligeable et de longueur naturelle $\ell_0 = 20\,\text{cm}$.

1. Le ressort s'allonge de $\Delta\ell = 3.0\,\text{cm}$ lorsqu'on lui suspend une masse $m = 10\,\text{g}$ dans le champ de pesanteur.

1.1. Déterminer la longueur $\ell_{\text{éq}}$ à l'équilibre ainsi que la tension exercée par le ressort.

1.2. En déduire la valeur de la constante de raideur k du ressort.

2. L'extrémité supérieure A du ressort reste fixe. L'extrémité inférieure, solidaire de la masse m est à la position M telle que $\overrightarrow{AM} = z\vec{u}_z$ où $\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire de l'axe vertical descendant.

2.1. Déterminer l'expression de la tension $\vec{T}(z)$ exercée par le ressort dans cette position.

2.2. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $z(t)$.

2.3. Déterminer la solution indépendante du temps $z_{\text{éq}}$ de l'équation précédente et la comparer à la longueur $\ell_{\text{éq}}$ trouvée ci-dessus.

3. La masse m est écartée vers le bas de $a = 4.0\,\text{cm}$ à partir de sa position d'équilibre, puis lâchée avec une vitesse initiale nulle.

3.1. Donner la solution générale de l'équation différentielle en $Z(t)$.

3.2. Déterminer les constantes d'intégrations à partir des conditions initiales.

3.3. Déterminer les constantes d'intégrations à partir des conditions initiales.

3.4. Déterminer la longueur la plus courte du ressort ainsi que les dates auxquelles elle est obtenue et la vitesse à ces dates. Faire les applications numériques.

3.5. Déterminer les dates pour lesquelles

- la norme de la vitesse est maximale ;
- la coordonnée de la vitesse est maximale.

V. Oscillateur amorti par frottement solide

On considère à nouveau le système étudié en I.1. auquel on ajoute un frottement solide.

1. Introduction : énoncer les lois de Coulomb du frottement solide.

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de m. On introduira un coefficient $\epsilon = \pm 1$ si nécessaire.

3. Résoudre cette équation en prenant $x(0) = x_0 + a > 0$ et la vitesse initiale nulle. Tracer approximativement $x(t)$. La masse m s'arrête-t-elle en $x = 0$?