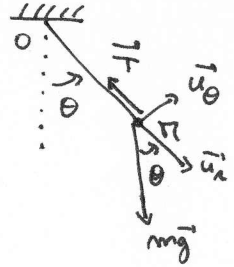
(I) Le pendule simple (3)



1) Théorème de l'énergie cinétique :
pour un déplacement $d\vec{r}$, la variation dE_c de l'énergie cinétique est liée au travail élémentaire des forces δW selon : $dE_c = \delta W$

$\vec{T} \perp$ à $\vec{v}$ donc ne travaille pas.

Seul le poids travaille : $\delta W = d\vec{r} \cdot m\vec{g} = (l\dot{\theta}\vec{u}_\theta dt)\, m\vec{g}$

$= ml\dot{\theta}\, dt\, \vec{g} \cdot \vec{u}_\theta = mlg\dot{\theta}\, dt\, (-\sin\theta)$

et $dE_c = d\left(\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2\right) = ml^2 \dot{\theta}\ddot{\theta}\, dt$

$dE_c = \delta W \Rightarrow \cancel{m} l^{\cancel{2}} \ddot{\theta} \cancel{\dot{\theta}} \cancel{dt} = -\cancel{m}g\cancel{l}\sin\theta\, \cancel{\dot{\theta}}\cancel{dt}$

d'où $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$ On retrouve bien l'équation du mouvement.

2) Actions mécaniques :

- $\vec{T}$ ne travaillant pas ;
- $\vec{P} = m\vec{g}$, force conservative ($E_p = mgz + Cte$)

⚠ avec z ascendant

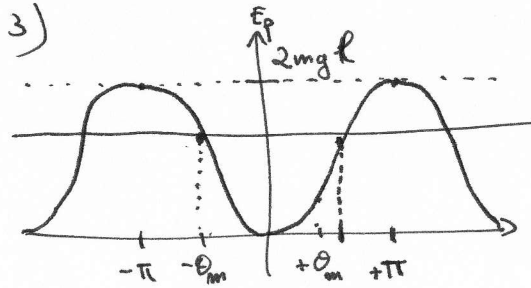
Conservation de l'énergie mécanique : $E_m = E_p + E_c$

$E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) + \underbrace{\cancel{Cte}}_{=0}$

$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow ml^2 \ddot{\theta}\dot{\theta} + mgl(-\sin\theta)\dot{\theta} = 0$

d'où $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

3)



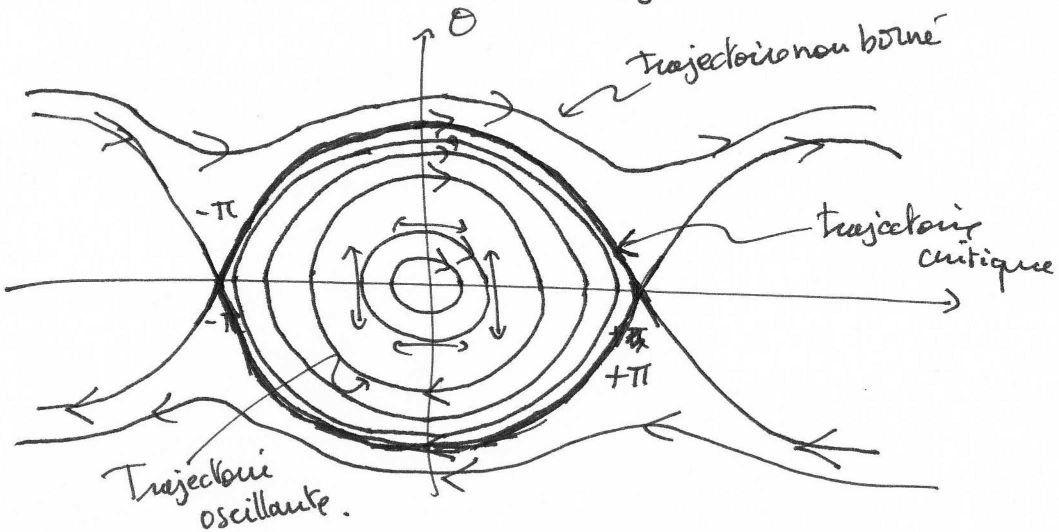
On prend l'origine des énergie telle que :

$E_p = mgl(1 - \cos\theta)$

$\rightarrow 0 \leq E_p \leq 2mgl$.

- Si $E_m = E_{m1} < 2mgl$, la trajectoire est bornée. Le pendule oscille entre $-\theta_m$ et $+\theta_m$ -
- Si $E_{m1} > 2mgl$, la trajectoire n'est pas bornée. Le pendule oscille entre $-\theta_m$ et $+\theta_m$.
- Si $E_m = 2mgl$: énergie critique pour retourner le pendule (période d'oscillation infinie).

4) Pour les petits angles : $l\ddot{\theta} = -g\sin\theta \simeq -g\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$ $(\omega_0^2 = g/l)$. Le portrait de phase est la représentation du mouvement dans le plan $(\dot{\theta};\theta)$ ou parfois $\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0};\theta\right)$ suivant les conventions.



$\rightarrow$ on tourne toujours dans le sens horaire : si $\dot{\theta} > 0 \rightarrow \theta \nearrow$

$\dot{\theta} < 0 \rightarrow \theta \searrow$

(II) Stabilité d'un équilibre

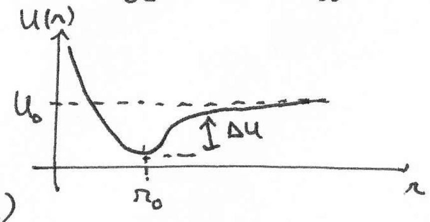
1) Si $\vec{f}$ dérive d'un potentiel $U(\vec{r})$, alors $\vec{f}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$

La force $\vec{f}$ ne dépend que de $\|\vec{r}\|$, on cherche donc une solution à symétrie sphérique $U(r)$. Alors $\vec{\nabla} U(r) = \frac{dU}{dr}\vec{u_r}$ soit $\frac{dU}{dr} = -\frac{k_1}{r^{13}} + \frac{k_2}{r^7}$

d'où $\boxed{U(r) = \frac{1}{12}\frac{k_1}{r^{12}} - \frac{1}{6}\frac{k_2}{r^6} + U_0}$

répulsif : (répulsion à courte distance)

attractif : (Van der Waals)



2) Equilibre $\Rightarrow$ $U(r)$ minimal en r_0

$$\left.\frac{dU}{dr}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow -\frac{k_1}{r_0^{12}} + \frac{k_2}{r_0^6} = 0 \Rightarrow \boxed{r_0 = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{1/6}}$$

Profondeur du potentiel ΔU :

$$\Delta U = U(r_0) - U_0 = \frac{1}{12}k_1\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 - \frac{1}{6}k_2\frac{k_2}{k_1} = -\frac{1}{12}\frac{k_2^2}{k_1}$$

$\boxed{\Delta U = -\frac{1}{12}\frac{k_2^2}{k_1}}$ Or $k_1 = k_2 r_0^6$; donc $|\Delta U| = \frac{k_2}{12 r_0^6}$

soit $\boxed{\begin{cases} k_1 = 12 r_0^{12}|\Delta U| \\ k_2 = 12 r_0^6 |\Delta U| \end{cases}}$

$$|\Delta U| = 120K \Rightarrow |\Delta U| = \underbrace{k_B}_{1{,}38\cdot 10^{-23}\ \text{USI}} \times 120K = 166\cdot 10^{-21}\ J.$$

$\rightarrow k_2 = 5{,}37\cdot 10^{-52}\ J\cdot m^6$

$k_1 = 1{,}67\cdot 10^{-108}\ J\cdot m^{12}$

3) L'équilibre sera stable si $\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r_0} > 0$

$$\frac{d^2U}{dr^2} = +13\frac{k_1}{r^{14}} - 7\frac{k_2}{r^8}$$

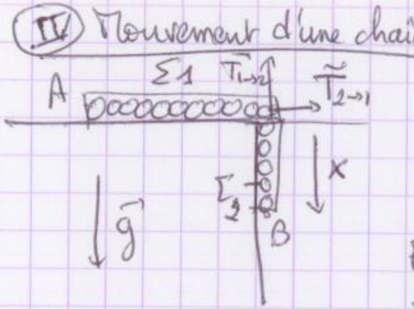
$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r_0} = \frac{1}{r_0^8}\left(13\frac{k_1}{r_0^6} - 7k_2\right) = \frac{1}{r_0^8}(13k_2 - 7k_2) = \frac{6}{r_0^8}k_2 > 0$$

$r_0^6 = \frac{k_1}{k_2}$

donc l'équilibre est bien stable.

Rq : en physique, on garde traditionnellement des unités correspondant à une "molécule" (ie un couple d'atome). Mais il est également possible d'exprimer ces grandeurs énergétiques par moles...

IV) Mouvement d'une chaîne



1/ On considère les deux sous-systèmes Σ_1 et Σ_2 de longueurs ~~en~~ $L-x$ et x

$$E_{m_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{L-x}{L}\right) m \dot{x}^2$$

$$E_{m_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right) m \dot{x}^2 + E_p$$

$dE_p = -dm\, g\, x \qquad dm = \frac{dx}{L} m$

$dE_p = -mg\frac{x\,dx}{L} \longrightarrow E_p = -\frac{mg}{L}\int_0^x x\,dx = -\frac{mgx^2}{2L}$

d'où $\underline{E_{m_2} = \frac{1}{2}\frac{x}{L} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{mg}{L}x^2}$

L'énergie du système $\Sigma = \{\Sigma_1 \cup \Sigma_2\}$ est conservée (pas de frottements) $E_m = E_{m_1} + E_{m_2} = C^{te}$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{mg}{L}x^2}$$

$\frac{dE_m}{dt} = 0 \longrightarrow \cancel{m}\cancel{\dot{x}}\ddot{x} - \cancel{\frac{1}{2}}\frac{\cancel{m}g}{L}\cancel{2}x\cancel{\dot{x}} = 0$

soit $\boxed{\ddot{x} - \frac{g}{L}x = 0}$

On pose $\tau = \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow x = A\,ch\left(\frac{t}{\tau}\right) + B\,sh\left(t/\tau\right)$

$x(t=0) = x_0 \quad \dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow \boxed{x = x_0\, ch\left(t/\tau\right)}$