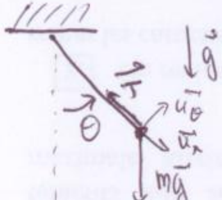
Corrigé TD2

(I) Le pendule simple (2) (d'après Agreg B)



1) poids $\vec{P}$, tension $\vec{T}$

2) $\vec{r} = r\vec{u}_r = \ell \vec{u}_r$

$\dot{\vec{r}} = \ell \dot{\theta} \vec{u}_\theta$

$\ddot{\vec{r}} = \ell \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - \ell \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$

PFD : $m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0}$

$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \rightarrow \boxed{T = mg\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2}$

3) $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ — 4) petites oscillations : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

$\theta_{(t)} = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\theta_{(t)} = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

$(A;B)$ et $(\theta_0;\varphi)$ déterminés par les conditions initiales.

5/ $\sin\theta \simeq \theta - \frac{\theta^3}{6} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta - \frac{\omega_0^2}{6}\theta^3 = 0 \quad (1)$

On cherche une solution $\theta = \theta_0\cos\omega t + \varepsilon\theta_0\cos 3\omega t$

où ε est petit.

$\dot{\theta} = -\theta_0\omega\sin\omega t + \varepsilon\theta_0(-3\omega)\sin 3\omega t$

$\ddot{\theta} = -\theta_0\omega^2\cos\omega t - 9\varepsilon\theta_0\omega^2\cos 3\omega t$

en injectant dans (1) :

$-\theta_0\omega^2\cos\omega t - 9\varepsilon\theta_0\omega^2\cos 3\omega t + \omega_0^2\theta_0\cos\omega t + \omega_0^2\varepsilon\theta_0\cos 3\omega t$

$- \frac{\omega_0^2}{6}\theta_0^3 \left(\cos\omega t + \varepsilon\cos(3\omega t)\right)^3 = 0$

on ne garde que les termes d'ordre 1 en ε

$\left(\cos\omega t + \varepsilon\cos(3\omega t)\right)^3 \simeq \cos^3\omega t + 3\varepsilon\cos^2\omega t\cos 3\omega t$

soit

$-\theta_0\omega^2\cos\omega t - 9\varepsilon\theta_0\omega^2\cos 3\omega t + \omega_0^2\theta_0\cos\omega t + \omega_0^2\varepsilon\theta_0\cos 3\omega t$

$-\frac{\omega_0^2}{6}\theta_0^3\cos^3\omega t - \frac{\omega_0^2}{2}\theta_0^3\varepsilon\cos^2\omega t\cos 3\omega t$

Or, $\cos^2\omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)$

$\cos^3\omega t = \frac{1}{4}(3\cos\omega t + \cos 3\omega t)$

On obtient :

$-\theta_0\omega^2\left[\cos\omega t + 9\varepsilon\cos 3\omega t\right] + \theta_0\omega_0^2\left[\cos\omega t + \varepsilon\cos 3\omega t\right]$

$-\frac{\theta_0^3}{6}\omega_0^2\left[\frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t + \varepsilon\left(\frac{3}{2}\cos 3\omega t + \frac{3}{2}\cos 2\omega t\cos 3\omega t\right)\right] = 0$

On néglige le terme en $\cos 5\omega t$ (ou 2^{e} harmonique)

et le terme en $\varepsilon\cos\omega t$ est négligeable devant $\cos\omega t$.

Il vient alors $\left(-\theta_0\omega^2 + \theta_0\omega_0^2 - \frac{1}{8}\theta_0^3\omega_0^2\right)\cos\omega t$

$+ \left(-\theta_0\omega^2 9\varepsilon + \theta_0\omega_0^2\varepsilon - \frac{\theta_0^3}{24}\omega_0^2 - \frac{\theta_0^3}{4}\varepsilon\omega_0^2\right)\cos 3\omega t = 0 \quad \forall t$

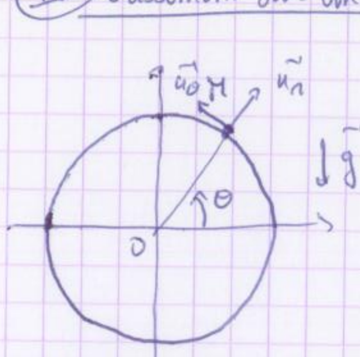
donc, en annulant chaque terme :

(*) $\cos\omega t = 0 \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right)}$ période d'oscillation dépendante de l'amplitude.

(*) $\cos 3\omega t = 0 \Rightarrow \varepsilon = -\frac{\theta_0^2}{192 - \frac{\theta_0^2}{3}}$.

III) Glissement sur une sphère

1



Aspect cinématique : les coordonnées polaires sont les plus adaptées.

$$\vec{OM} = r\vec{u_r}$$
$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$
$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u_\theta}$$

Aspect dynamique : bille sur la sphère ~~dans~~ sans frottement ⇒ $\vec{R}$ réaction de la sphère tq $\vec{R} = R\vec{u_r}$ avec $R > 0$

à la limite du décollement, $R = 0$
on se place avant cette limite, donc $\dot{r} = 0$ car sur la sphère

on applique le PFD : $\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = m\vec{g} + \vec{R}$ soit

$$\begin{cases} -mr\dot{\theta}^2 = R - mg\sin\theta \\ mr\ddot{\theta} = -mg\cos\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\cos\theta & (1) \\ R = mg\sin\theta - mr\dot{\theta}^2 & (2) \end{cases}$$

$(1)\times\dot{\theta} \longrightarrow \dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\dot{\theta}\cos\theta \rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r}(\sin\theta - 1)$

car $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 0$

donc $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r}(1 - \sin\theta)$

injecté dans (2), on obtient $R = mg(3\sin\theta - 2)$

2

$R > 0$ ssi $\sin\theta > 2/3$

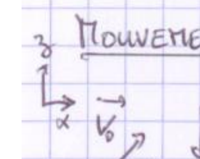
ssi $\cos(\pi/2 - \theta) > 2/3$

$\Leftrightarrow \pi/2 - \theta < \text{Arccos}(2/3)$

$\Leftrightarrow \boxed{\theta > \frac{\pi}{2} - \text{Arccos}\,2/3 = \text{Arcsin}\,2/3}$

$\boxed{\theta_d = \text{Arcsin}\,2/3}$ avec les conventions de la figure.

MOUVEMENT D'UNE FUSÉE BALISTIQUE (extrait Agreg B 2006)



1) PFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = +m\vec{g}$

projection : $\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V_0\cos\alpha \\ \dfrac{dz}{dt} = -gt + V_0\sin\alpha \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x(t) = V_0\cos\alpha\, t \\ z(t) = V_0\sin\alpha\, t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ si $\begin{cases} x(t=0)=0 \\ z(t=0)=0 \end{cases}$

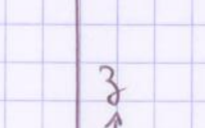
⚠ L'équation de la trajectoire est demandée, il faut éliminer t.

$t = \dfrac{x}{V_0\cos\alpha}$ donc $z = x\tan\alpha - \dfrac{1}{2}g\dfrac{x^2}{V_0^2\cos^2\alpha}$

$$\boxed{z = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2\alpha}x^2} \quad (1)$$

⇒ Mouvement parabolique.

2/ altitude max en x_0 tq $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x_0} = 0$



$\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x_0} = \tan\alpha - \dfrac{g}{V_0^2\cos^2\alpha}x_0 \rightarrow x_0 = \dfrac{V_0^2}{2g}\sin 2\alpha$.

$\boxed{x_0 = \dfrac{V_0^2}{2g}\sin 2\alpha}$; $\boxed{z_0 = \dfrac{V_0^2}{2g}\sin^2\alpha}$

P point $(x_p ; 0)$ de portée :

solution de $z_p = 0 = x_p\left(\tan\alpha - \dfrac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x_p\right)$

soit $\boxed{x_p = \dfrac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha}$

portée max ⇔ $\sin 2\alpha$ max ⇔ $2\alpha = \pi/2$ soit $\boxed{\alpha = \pi/4}$

$x_{p\,max} = \dfrac{V_0^2}{g}$.

3) Le seul paramètre libre est α.
Pour $(x ; z)$ un point de l'espace donné, existe-t-il α tel que :

$$z = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2}\frac{1}{\cos^2\alpha}x^2$$

on pose $\xi = \tan\alpha$ alors $z = x\xi - \dfrac{g x^2}{2V_0^2}(1+\xi^2)$.
$\left(\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\xi^2}\right)$

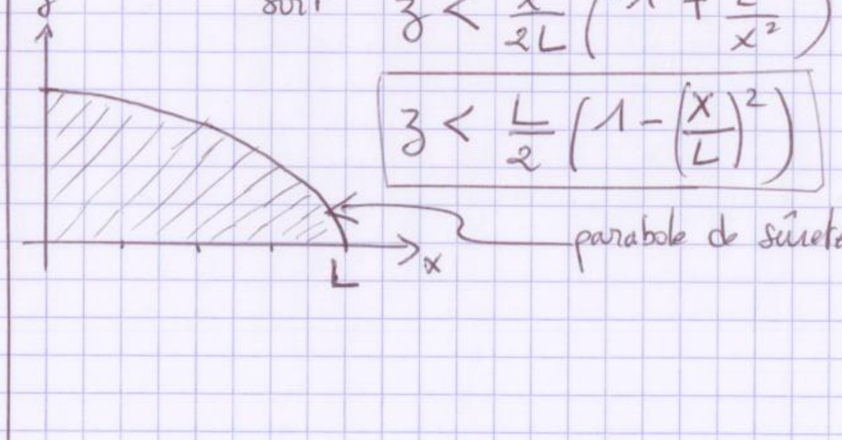
On pose $L = \dfrac{V_0^2}{g}$ la portée maximale. $z = x\xi - \dfrac{x^2}{2L}(1+\xi^2)$

soit $\xi^2 - \left(\dfrac{2L}{x}\right)\xi + 1 + \dfrac{2Lz}{x^2} = 0$

solution si $\dfrac{L^2}{x^2} - 1 - \dfrac{2Lz}{x^2} > 0$

soit $z < \dfrac{x^2}{2L}\left(-1 + \dfrac{L^2}{x^2}\right)$.

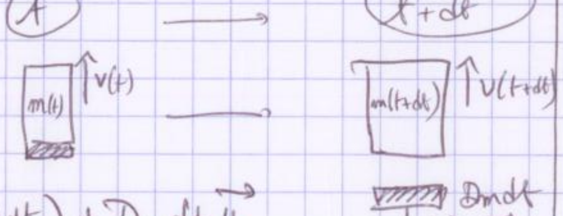
$$\boxed{z < \frac{L}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)}$$



FUSÉE À UN ETAGE [ecrit agreg B 2006]

1) Bilan de quantité de mouvement du système {fusée + gaz éjectés pendant dt} entre t et t+dt.

masse éjectée : $D_m dt$; (t) ⟶ (t+dt)



$\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$

$\vec{p}(t+dt) = m(t+dt)\vec{v}(t+dt) + D_m dt\,\vec{u}$

$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = m(t+dt)\vec{v}(t+dt) + D_m dt(\vec{u}+\vec{v}) - m(t)\vec{v}(t)$

$= \cancel{m(t)\vec{v}(t)} + m(t)\frac{d\vec{v}}{dt}dt + \frac{dm}{dt}dt\,\vec{v} + D_m dt(\vec{u}+\vec{v}) - \cancel{m(t)\vec{v}(t)}$

donc $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + D_m(\vec{u} + \cancel{\vec{v}} - \cancel{\vec{v}})$ car $\frac{dm}{dt} = -D_m$

donc $\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + D_m\vec{u}}$

⚠ ici, on cherche à appliquer le PFD donc dans un référentiel galiléen (ici $R_{terrestre}$). Mais $\vec{u}$ est la vitesse d'éjection dans le référentiel de la fusée. D'après la composition des vitesses $\vec{u}+\vec{v}$ est la vitesse d'éjection dans $R_{terrestre}$.

2) PFD dans $R_{terrestre}$ galiléen :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m(t)\vec{g}$$

d'où le résultat immédiat

$$\boxed{m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = m(t)\vec{g} - D_m\vec{u}}$$

Si elle décolle verticalement, il faut $\frac{dv}{dt} > 0$ initialement

donc $\boxed{mg < D_m u}$ (poussée supérieure au poids).

3/ $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{D_m}{m(t)}\vec{u}$

Or $m(t) = M - D_m t$

d'où $\boxed{\vec{a}(t) = \vec{g} - \frac{D_m}{M - D_m t}\vec{u}}$

Carburant épuisé quand $m(t) = M - m_c = M - D_m t_e$

$\boxed{t_e = \frac{m_c}{D_m}}$ AN : $t_e = \frac{0{,}8 \times 12}{0{,}120}$

$\boxed{t_e = 80\,s}$

4/ $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt = \vec{g}t - \left(\int \frac{D_m dt}{M - D_m t}\right)\vec{u}$

$= \vec{g}t - \left(\int \frac{d\alpha}{1-\alpha}\right)\vec{u}$ $\left(\alpha = \frac{D_m t}{M}\right)$

$= \vec{g}t + \int \frac{d\beta}{\beta}\,\vec{u}$

$= \vec{g}t + \left(\ln\left(1 - \frac{D_m t}{M}\right)\right)\vec{u}$

Donc $\boxed{\vec{v}(t) = \vec{g}t + \ln\left(1 - \frac{D_m t}{M}\right)\vec{u}}$

$\vec{a}\cdot\vec{u_z} = -g + \frac{D_m u}{m(t)}$ $\quad m(t) < M$

donc si la fusée décolle, on a toujours $\frac{D_m u}{m} > \frac{D_m u}{M} > g$

L'accélération est toujours non nulle ~~tant~~ qu'il y a du carburant.

à t_e, la fusée est soumise à la pesanteur locale et ne peut que ralentir. On a donc $\boxed{t_1 = t_e}$

On a $g = \mathcal{G}\frac{M_T}{r^2}$ où r est la distance au centre de la terre.

$r = R_T + z$ avec $R_T = 6\,400$ km

On a $z \ll R_T$

donc $g(z) = \frac{\mathcal{G} M_T}{R_T^2} \frac{1}{\left(1+\frac{z}{R_T}\right)^2} = g_0 \frac{1}{\left(1+\frac{z}{R_T}\right)^2}$

avec g_0 pesanteur à la surface de la terre.

$g(z) \simeq g_0\left(1 - \frac{2z}{R_T}\right) \Rightarrow$ correction de $\frac{2z}{R_T} = 3{,}6\%$

Correction faible de qq % - Approximation pertinente.

5) Après t_1, mouvement de chute libre avec vitesse initiale

$V_{max} = -g t_e - \ln\left(1 - \frac{D_m t_e}{M}\right)u$.

$v(t) = V_{max} - g(t - t_1)$

Alt. Maximum pour $v(t_2) = 0 \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{V_{max}}{g}$

$t_2 = \cancel{t_e} - \cancel{\frac{g t_e}{g}} - \frac{\ln\left(1 - \frac{D_m t_e}{M}\right)}{g}u$.

$t_e = \frac{m_c}{D_m}$ d'où $\boxed{t_2 = -\frac{u}{g}\ln\left(1 - \frac{m_c}{M}\right)}$

De même $z(t) = z_1 + v_{max}(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2$

alors $z_2 = z_1 + \frac{V_{max}^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{V_{max}^2}{g^2}$

$z_2 = z_1 + \frac{V_{max}^2}{2g}$

$$\boxed{z_2 = z_1 + \frac{1}{2g}\left(\frac{g m_c}{D_m} + \ln\left(1 - \frac{m_c}{M}\right)u\right)^2}.$$

$$\boxed{z_2 = 566 \text{ km}}$$

6) $z_2 < R_T$ donc le champ de pesanteur est encore notable, la vitesse de libération n'est pas atteinte.

en effet $V_{max} = 3{,}1$ km/s

alors que $V_{libération} = 11{,}2$ km/s.