TD2 Principe Fondamental de la Dynamique

26/09/2014

I. Le pendule simple (2)

On accroche une bille de masse m à un fil inextensible de longueur l, de masse négligeable, d'extrémité fixe O. On note θ l'angle entre le fil et la verticale, T la tension du fil.

Question préliminaire : On note $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Quelles est la dimension de ω_0 ?

1. Effectuer le bilan des actions mécaniques sur la bille.

2. En utilisant la loi fondamentale de la dynamique, donner deux équations liant θ, $d\theta/dt$ et T d'une part, $d^2\theta/dt^2$ et θ d'autre part.

3. Donner l'équation du mouvement dans le cas général.

4. Dans le cas des "petites oscillations" donner la solution la plus générale du mouvement, puis dans le cas particulier où $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

5. Dans le cas des plus grandes amplitudes, on développe le terme en $\sin\theta$ à l'ordre 3 selon

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}.$$

5.1. Que devient l'équation du mouvement ?

5.2. On cherche une solution de la forme

$$\theta = \theta_0 \cos\omega t + \varepsilon\theta_0 \cos 3\omega t.$$

Quelle est, dans cette solution, la pulsation fondamentale ? Commenter.

II. Glissement sur une sphère

On considère une sphère de centre O, de rayon ρ, sur le sommet de laquelle on pose une masse m de faibles dimensions. La masse m glisse alors sans frottements sur la sphère. Déterminer l'angle θ_d pour lequel la masse m décolle de la sphère.

III. Mouvement d'une fusée balistique [extrait Agreg B 2006]

A la date $t = 0$, une fusée balistique, assimilée à un point matériel M de masse m constante, est lancée à partir d'un point O de la surface terrestre avec une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.

1. Établir l'équation de la trajectoire de la fusée dans le champ de pesanteur terrestre considéré comme uniforme. On néglige les frottements avec l'air. Quelle est la nature de la trajectoire obtenue ?

2. Calculer en fonction de v_0, g et α les coordonnées du point S d'altitude maximale atteinte ainsi que la portée de la fusée. Pour quel angle α cette portée est-elle maximale ?

3. La vitesse initiale v_0 de la fusée étant fixée, on peut faire varier l'angle α dans un plan vertical donné. Établir l'équation de la courbe dite "parabole de sûreté" qui sépare les points du plan vertical pouvant être atteints par la fusée de ceux qui ne peuvent pas l'être.
On donne : $1/\cos^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$.

IV. Fusée à un étage [extrait Agreg B 2006]

Une fusée, de masse totale initiale M, contient au départ un mélange combustible de masse $m_c = 0.8M$. Elle est lancée verticalement à la date $t = 0$. On note m la masse de la fusée à une date t. La propulsion est assurée par un dispositif à réaction. Les gaz émis sont éjectés de la tuyère avec un débit massique constant D_m à la vitesse relative u par rapport à la fusée. On néglige la résistance de l'air.

kenneth.maussang@ens.fr

1. Donner l'expression de la quantité de mouvement des gaz éjectés par la fusée entre les instants t et $t + dt$. En déduire la variation de la quantité de mouvement de la fusée entre les instants t et $t + dt$.

2. Établir la relation

$$m(t)\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = m(t)\mathbf{g} - D_m\mathbf{u}.$$

En déduire l'expression de la force propulsive exercée par la réaction des gaz sur la fusée. A quelle condition la fusée peut-elle décoller du sol verticalement ?

3. Exprimer l'accélération de la fusée en fonction du temps. A quelle date t_e le carburant est-il épuisé ? A.N. Données : $M = 12\,\mathrm{t}$; $u = 2400\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; $D_m = 120\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$.

4. Déterminer l'expression de la vitesse de la fusée en fonction du temps. Quelle est la vitesse maximale de la fusée ? A quelle date t_1 est-elle atteinte ? L'altitude z_1 atteinte à cette date est d'environ 83 km (ne pas justifier). Au vu de ce résultat, critiquer l'approximation $g \approx$constante qui a été faite.

5. A quelle date t_2 la fusée atteint-elle son altitude maximale z_2 ? Déterminer z_2. A.N.

6. La fusée étudiée peut-elle communiquer à un satellite une vitesse qui lui permette de se libérer de l'attraction terrestre ?

V. Projectile (d'après Capes Interne 1996)

Un point matériel de masse m est lancé en O, origine d'un repère (O, x, y, z) avec une vitesse v_0 faisant un angle α avec l'axe Ox.

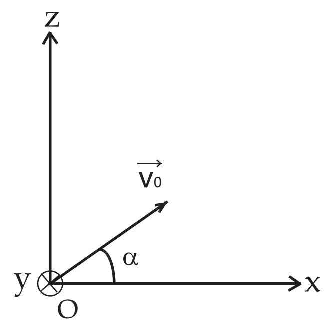

Figure 1: Lancé d'un projectile avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$

1. On lance avec la même vitesse initiale vers le haut ($\alpha = \pi/2$) le même objet, d'abord dans le vide, puis dans l'air où il subit des frottements non négligeables. Comparer dans ces deux cas : la hauteur maximale atteinte par l'objet, et le temps au bout duquel il l'atteint.

2. On revient au cas général (α quelconque), et on se place dans le vide. Déterminer les caractéristiques de la trajectoire : équation cartésienne, portée horizontale, angles de tir possibles pour atteindre un même point $D(d, 0, 0)$. Pour une vitesse initiale de norme v_0 donnée, montrer qu'un point P au sol ne peut être atteint que s'il se trouve dans une certaine région de l'espace.