

---

# Mécanique - compléments

---

*Kenneth Maussang*  
kenneth.maussang@ens.fr

## Table des matières

|   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Problème à deux corps - Forces centrales . . . . . | 1  |
| 2 | Référentiel terrestre - pesanteur . . . . .        | 8  |
| 3 | Collisions en mécanique classique . . . . .        | 14 |
| 4 | Introduction à la relativité . . . . .             | 19 |



# 1 Problème à deux corps - Forces centrales

---

## 1.1 Problème à deux corps

On considère un système isolé de deux points matériels  $A_1$  (de masse  $m_1$ ) et  $A_2$  ( $m_2$ ) dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ . On peut décomposer le mouvement de l'ensemble en

- Mouvement du centre d'inertie  $G$  de  $(A_1, A_2)$  dans  $\mathcal{R}_g$ .
- Mouvement autour de  $G$  dans le référentiel du centre de masse (ou barycentrique)  $\mathcal{R}^*$ .

On pose

$$\vec{r} = \overrightarrow{A_1 A_2} = r\vec{u}, \quad \vec{f} = \vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12},$$
$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{G A_1}, \quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{G A_2}.$$

Par définition du centre de masse  $G$ , on a

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0},$$

et par définition de  $\vec{r}$ ,

$$-\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}.$$

On en déduit alors les relations suivantes

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (1.1)$$

Le système étant isolé, le  $\mathcal{R}^*$  est galiléen, et le PFD appliqué à  $A_2$  donne

$$m_2 \left( \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{f} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Si on pose

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{masse réduite}),$$

cette équation devient

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f},$$

et décrit le mouvement d'un point matériel de masse  $\mu$  et de position  $\vec{r}$  (dans le  $\mathcal{R}^*$ ). Ce point est appelé **mobile fictif**.

On est donc ramené à l'étude du mouvement d'un point matériel unique (le mobile fictif), les équations (2.1) permettant ensuite d'en déduire le mouvement de  $A_1$  et  $A_2$ . On peut ensuite vérifier que le moment cinétique et l'énergie cinétique du système sont les mêmes que ceux du mobile fictif (de masse  $\mu$ ).

$$\vec{L}^* = m_1 \vec{r}_1 \wedge \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \wedge \dot{\vec{r}}_2 = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}},$$
$$E_c^* = \frac{1}{2} m_1 \dot{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{v}_2^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{v}^2.$$

## 1.2 Mouvements à force centrale

Dans  $\mathcal{R}^*$ , le mobile fictif  $M(\mu)$  est soumis à la **force centrale**  $\vec{f}$  dont le support passe constamment par  $G$  (fixe dans  $\mathcal{R}^*$ ). On suppose que cette force dérive de l'énergie potentielle  $E_p(r)$  telle que

$$\vec{f}(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}.$$

Pour une force centrale, le théorème du moment cinétique donne immédiatement

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

car le moment en  $G$  d'une force centrale est nul.

Il est alors intéressant de remarquer qu'il existe 2 intégrales premières du mouvement :

— Intégrale première de l'énergie :  $E_p + E_c = E$ ,

— Intégrale première des aires :  $\vec{L} = \vec{C}t\vec{e}$ .

On considère désormais le mouvement général d'un mobile  $M$ , soumis à une force centrale passant par  $O$ .

### 1.2.1 Loi des aires

Comme  $\vec{M}_{\text{ext}}(O) = \vec{0}$ ,  $\vec{L} = \vec{C}t\vec{e}$  et comme  $\vec{r}$  est orthogonal à  $\vec{L}$  par définition,  $\vec{OM}$  est dans le plan fixe perpendiculaire à  $\vec{L}$ , passant par  $O$ . **Le mouvement est donc plan.**

Le mouvement étant étudié dans  $\mathcal{R}^*$ , on reprend les notations habituelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} O \text{ pour le point fixe de } \mathcal{R}^*, \text{ i.e. } G, \\ M \text{ (de masse } m) \text{ pour le mobile fictif,} \\ \text{coordonnées polaires dans le plan du mouvement : } r \text{ et } \theta. \end{array} \right.$$

On désigne par  $\mathcal{R}$  le repère  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . On a

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z.$$

$r^2\dot{\theta}$  représente le double de la vitesse aréolaire (aire balayé par le rayon vecteur  $\vec{OM}$  par unité de temps).

On pose

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{C}{2},$$

$C$  est la **constante des aires**, directement liée au moment cinétique.

### 1.2.2 Equation radiale de l'énergie

On exprime l'intégrale première de l'énergie en coordonnées polaires avec  $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et donc  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ , soit

$$E = E_p(r) + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Utilisant l'intégrale première des aires

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2},$$

il vient

$$E = E'_p(r) + E'_c(r),$$

avec

$$E'_p(r) = E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad \text{et} \quad E'_c(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2.$$

$E'_c(r)$  n'est autre que l'énergie cinétique dans le référentiel tournant  $\mathcal{R}$ .  $E'_p(r)$  est l'énergie potentielle dans  $\mathcal{R}$  où il faut tenir compte des forces d'inertie. En effet, dans  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{f} = f(r)\vec{u}_r + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$ , et comme les forces de Coriolis ne travaillent pas, on aura pour un déplacement  $\delta W = (f(r) + mr\dot{\theta}^2) dr$ , ce qui correspond à une énergie potentielle

$$- \int f(r)dr - \int mr\dot{\theta}^2 dr = E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2} + Cte,$$

car  $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ , CQFD.

Cette énergie  $E'_p(r)$  est appelée *énergie potentielle effective*.

### 1.2.3 Lois du mouvement

Il faut raisonner à partir des intégrales premières du mouvement

$$r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m} \tag{1.2}$$

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = 2\frac{E}{m} - 2\frac{E_p}{m}, \tag{1.3}$$

et ensuite, on peut obtenir différentes grandeurs selon

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Élimination de } \theta \longrightarrow r(t), \\ \text{Élimination de } r \longrightarrow \theta(t), \\ \text{Élimination de } t \longrightarrow r(\theta). \end{array} \right.$$

Ces méthodes sont générales.

### 1.2.4 Formule de Binet

Cette formule est surtout utilisée dans le cas des forces en  $\frac{1}{r^2}$  (potentiels newtonniens). En éliminant  $t$  des équations (2.3) en utilisant

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}.$$

On effectue ensuite le changement de variable

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)},$$

et on pose

$$u'(\theta) = \frac{du}{d\theta}.$$

On dérive enfin l'expression obtenue par rapport à  $\theta$  pour éliminer la constante  $E$ . Il vient alors,

$$\boxed{f = -\frac{L^2}{m}u^2(u'' + u) = -mC^2u^2(u'' + u)}.$$

Cette relation permet de déterminer la loi de force  $f(r)$  (ou  $f(u)$ ) lorsque l'on connaît la trajectoire  $r(\theta)$ , ou réciproquement de déterminer la trajectoire correspondant à une loi de force donnée.

## 1.3 Interaction Newtonienne

Il s'agit d'une loi de force en  $f(r) = \frac{K}{r^2}$ , ce qui correspond à une énergie potentielle  $E_p(r) = \frac{K}{r}$ , si l'on choisit la constante de façon à ce que  $E_p(\infty) = 0$ .

### 1.3.1 Formules sur les cônes

Équation polaire d'une cône : avec le pôle au foyer, et l'axe focal pour axe polaire, on a

$$r = \frac{p}{1 \pm e \cos \theta},$$

où  $p$  est le **paramètre** de la cône, le signe  $\pm$  dépend du foyer choisi comme pôle et  $e$  est l'excentricité. Si  $e > 1$ , on a une hyperbole, si  $e = 1$  on a une parabole, et si  $e < 1$ , on a une ellipse.

Cas de l'ellipse : pour  $a$  le demi grand axe,  $b$  le demi petit axe et  $2c$  la distance entre les foyers, on a

$$e = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad a^2 = b^2 + c^2, \quad S = \pi ab.$$

### 1.3.2 Mouvement dans le cas attractif

$$f = -\frac{k}{r^2}, \quad E_p = -\frac{k}{r}, \quad k > 0.$$

A partir de la formule de Binet, dans laquelle on reporte  $f = -kr^{-2} = -ku^2$ , on obtient

$$u'' + u = \frac{mk}{L^2} \quad \text{soit} \quad u(\theta) = A \cos(\theta + \varphi) + \frac{mk}{L^2}.$$

Par choix correct de l'axe polaire (conditions initiales), on peut prendre  $\varphi = 0$ , ce qui donne

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

avec  $p = \frac{L^2}{mk}$ , et  $e = \frac{AL^2}{mk} = Ap$ . Pour déterminer  $e$ , et donc la nature de la trajectoire, on peut utiliser

- les conditions initiales :  $E$  et  $L$ ,
- l'énergie : en reportant l'équation de la trajectoire dans l'expression de l'énergie, et après avoir éliminer  $t$ , il vient

$$e = \sqrt{1 + \frac{2mp^2}{L^2} E}.$$

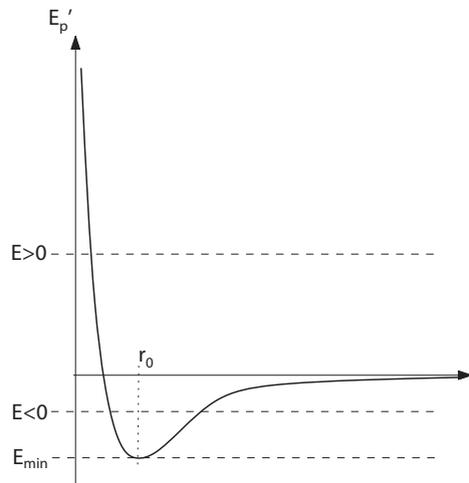
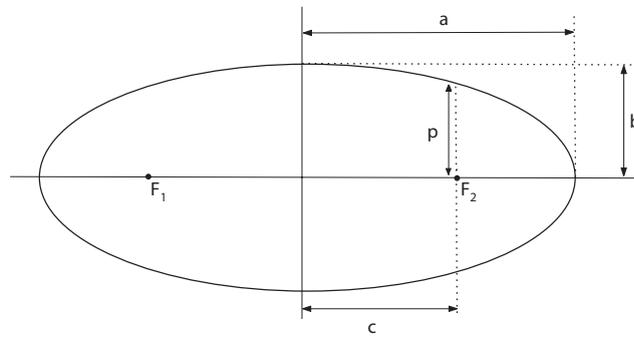
Si  $E > 0$ , on a une hyperbole, si  $E = 0$  une parabole et si  $E < 0$  ellipse.

- utiliser l'énergie effective.

$$E = E'_p(r) + E'_c(r) \quad \text{avec} \quad E'_p = E_p + \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Comme  $E'_c > 0$ , les seuls mouvement possibles vérifient  $E'_p \leq E$  et donc, si  $E \geq 0$ , cette condition permet à la particule de s'éloigner à l'infini (**états libres** : hyperbole ou parabole). En revanche, si  $E < 0$ , la particule doit rester à distance finie (**états liés** : ellipses ou bien cercle pour  $E = E_{\min}$ ).

Une dernière méthode consiste en l'utilisation du vecteur excentricité, mais hors programme des classes préparatoires.



### 1.3.3 Application au mouvement des planètes

Lois de Képler

**1<sup>re</sup> loi** : les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers,

**2<sup>e</sup> loi** : leur mouvement obéit à la loi des aires,

**3<sup>e</sup> loi** : les carrés des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes.

Conséquences

— Le mouvement est plan et suit la loi des aires : *le champ de forces qui s'exerce sur les planètes est central.*

— Les trajectoires sont des ellipses :  $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p}(1 + e \cos \theta) \implies u + u'' = \frac{1}{p}$ .

— On reporte dans la formule de Binet,

$$f = -\frac{L^2 u^2}{m p} \quad \text{mais} \quad \frac{L}{m} = r^2 \dot{\theta} = 2 \frac{dS}{dt} = \frac{2\pi ab}{T},$$

Donc

$$f = -\frac{4m\pi^2 a^2 b^2}{p T^2 r^2},$$

et comme  $p = b^2/a$ ,

$$f = -4\pi \frac{a^3 m}{T^2 r^2}.$$

En appliquant la 3<sup>e</sup> loi de Képler et en faisant apparaître la masse  $M$  du soleil pour symétriser, il vient

$$f = -\mathcal{G} \frac{mM}{r^2}.$$

C'est la loi de la gravitation de Newton avec  $\mathcal{G} \approx 6.67 \cdot 10^{-11}$  USI (constante de gravitation).

### 1.3.4 Mouvement dans le cas répulsif

Il suffit, formellement, de remplacer  $k$  par  $-k$ . Le problème type est la diffusion de Rutherford de particules  $\alpha$  par les noyaux d'une feuille d'or que l'on prend suffisamment mince pour ne pas absorber les particules  $\alpha$ . On rappelle qu'en toute rigueur, il faut raisonner sur le mobile fictif affecté de la masse réduite, avant d'en déduire le mouvement de chaque particule.

Il est ici facile d'expliciter les conditions initiales

—  $L = mbv_0$ ,

—  $E = \frac{1}{2}mv_0^2$  (car lorsque  $M$  est très éloigné,  $E_p = 0$ ).

Deux des problèmes qui se posent concernent les déterminations de la distance minimale d'approche  $r_1$  et de l'angle de diffusion  $\varphi$ .

Pour déterminer l'équation de la trajectoire, on utilise la formule de Binet qui donne

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \theta}.$$

C'est l'équation d'une hyperbole, avec  $p = \frac{L^2}{mK}$  et  $e = \frac{AL^2}{mK}$ , où  $A$  est une constante d'intégration. Pour le calcul de  $r_1$ , on écrit dans l'intégrale première de l'énergie que  $\dot{r} = 0$

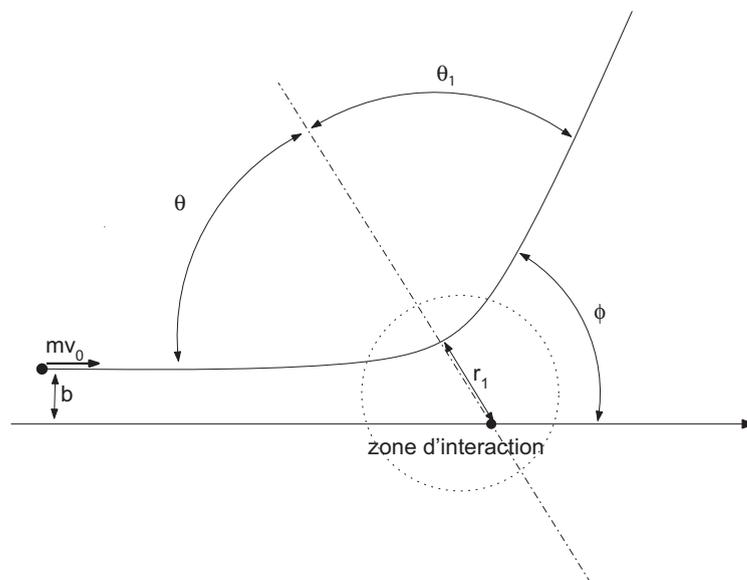


FIGURE 1.1 – Géométrie considérée pour la diffusion de Rutherford.  $b$  est le paramètre d'impact.

en  $r = r_1$ , ce qui conduit à

$$r_1 = \frac{k}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{mv_0^2}\right)^2 + b^2}.$$

Pour le calcul de l'angle de diffusion  $\varphi = \pi - 2\theta_1$ , on écrit

$$\cos \theta_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \cos \theta = \frac{1}{e},$$

donc  $\tan^2 \theta_1 = e^2 - 1$ , avec  $e = \sqrt{1 + 2\frac{L^2}{mk^2}E}$ . On en déduit

$$\tan \theta_1 = \frac{mbv_0^2}{k},$$

et comme  $\varphi = \pi - 2\theta_1$ , il vient finalement

$$\boxed{\cot \frac{\varphi}{2} = \frac{mbv_0^2}{k}}$$

où cot désigne la cotangente. C'est la formule de Rutherford.

## 2 Référentiel terrestre - pesanteur

---

Les lois de la mécanique (théorèmes généraux et théorème de l'énergie cinétique) peuvent continuer à être appliquées dans un référentiel non galiléen à condition de rajouter aux forces d'interaction les forces d'inertie (d'entraînement et de Coriolis).

En introduisant le **poids** qui contient des termes d'inertie, il constitue une très bonne approximation d'un référentiel galiléen.

### 2.1 Champ de pesanteur terrestre

#### 2.1.1 Poids d'un corps

Pour maintenir un point matériel **en équilibre** à la surface de la Terre, il faut lui appliquer une force  $\vec{F}$  (tension d'un fil, réaction du support, effort musculaire,...). On pose *par définition*

$$\boxed{\vec{P} = -\vec{F}},$$

$\vec{P}$  est le poids du point matériel. Pour un système matériel, on généralise selon (pour  $N$  particules par exemple)

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i.$$

#### 2.1.2 Champ de pesanteur

On définit le champ de pesanteur  $\vec{g}$  par la relation

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Un point matériel de masse  $m$  en équilibre à la surface de la Terre est soumis aux interactions gravitationnelles  $m\vec{G}_A$  (surtout de la part de la Terre, mais également de la part des autres astres (lune, soleil,...), à la force  $\vec{F}$  qui le maintient et à la force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_e$  (la force de Coriolis est nulle à l'équilibre).

Condition d'équilibre

$$m\vec{G}_A + \vec{F} + \vec{f}_e = \vec{0},$$

donc

$$\boxed{m\vec{g} = \vec{P} = -\vec{F} = m\vec{G}_A + \vec{f}_e}. \quad (2.1)$$

Il est donc important d'avoir conscience du fait que

**La force d'inertie d'entraînement de la Terre est prise en compte dans le poids.**

Si l'on veut maintenant déterminer le mouvement du point  $M$  lorsqu'il est soumis à une force supplémentaire quelconque  $\vec{F}$ , on écrira

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{F} + m\vec{G}_A + \vec{f}_e + \vec{f}_c,$$

où  $\mathcal{R}_T$  désigne le référentiel terrestre. Mais compte tenu de la rotation très lente de la Terre, la force de Coriolis est en générale négligeable, sauf dans les expériences fines<sup>1</sup>, et en utilisant (2.1) il vient

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{F} + \vec{P}.$$

---

1. comme par exemple le pendule de Foucault ou la déviation vers l'Est

À condition de faire intervenir le poids et de pouvoir négliger les forces de Coriolis,  $\mathcal{R}_T$  se comporte comme un référentiel galiléen.

## 2.2 Étude sommaire des marées

Soit  $M$  un point à la surface de la Terre, de centre  $C$ . Faisons les hypothèses suivantes

- Tous les astres sont à symétrie sphérique et donc le champ gravitationnel qu'ils créent est celui d'un point de masse  $M_A$  situé en son centre,
- $\vec{\Omega}(\text{Terre}/\mathcal{R}_{\text{géo}}) = \vec{Ct\grave{e}}$ .

Considérant un point matériel de masse  $m$ , soumis à  $\vec{F}$ , en équilibre par rapport à la Terre, écrivons en séparant les champs gravitationnels de la Terre  $\vec{\mathcal{G}}_T$  et celui des autres astres  $\vec{\mathcal{G}}_A$

- le PFD pour  $M$  dans  $\mathcal{R}_T$

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{0} = \vec{F} + m\vec{\mathcal{G}}_T(M) + m\vec{\mathcal{G}}_A(M) + \vec{f}_e,$$

- le PFD pour **la Terre** dans  $\mathcal{R}_C$  (référentiel de Copernic, considéré comme galiléen)

$$M_T\vec{a}_{\mathcal{R}_C}(C) = M_T\vec{\mathcal{G}}_A(C),$$

- calculons l'accélération d'entraînement pour  $M$

$$\vec{a}_e = \left( \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\mathcal{R}_C} = \left( \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_{\mathcal{R}_C}(C) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM} \right) \right)_{\mathcal{R}_C} = \vec{a}_{\mathcal{R}_C}(C) - \Omega^2 \overrightarrow{HM},$$

où  $H$  est la projection orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation de la Terre. On en déduit

$$-\frac{F}{m} = \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \Omega^2 \overrightarrow{HM} + \left( \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(C) \right).$$

Comme  $M$  est au repos,  $\vec{P} = m\vec{g} = -\vec{F}$  par définition, d'où finalement

$$\vec{g} = \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \Omega^2 \overrightarrow{HM} + \left( \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(C) \right).$$

Le terme entre parenthèses est un terme dit *différentiel*, traduisant une inhomogénéité du champ gravitationnel des astres autres que la Terre (surtout la Lune et le Soleil) qui est responsable d'une légère variation du champ de pesanteur. Cet effet est en général négligeable, sauf lorsqu'il concerne de grandes masses déformables (eaux des océans). Évaluons (*Cf.* fig.(2.2)) ce terme différentiel

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(C) = GM_a \left( \frac{\overrightarrow{MA}}{MA^3} - \frac{\overrightarrow{CA}}{CA^3} \right),$$

où  $G$  est la constante de gravitation universelle.

De plus,

$$\overrightarrow{MA} = (d-x)\vec{u}_x + (-y)\vec{u}_y + (-z)\vec{u}_z, \quad \overrightarrow{CA} = d\vec{u}_x,$$

$$MA^3 = ((d-x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \approx (d^2 - 2xd)^{3/2} \approx d^3 \left( 1 - 3\frac{x}{d} \right), \quad CA^3 = d^3,$$

d'où

$$\vec{\varepsilon} \approx \frac{GM_a}{d^3} \left( \overrightarrow{MA} \left( 1 + 3\frac{x}{d} \right) - \overrightarrow{CA} \right) = \frac{GM_a}{d^3} \left( \overrightarrow{MC} + 3x\vec{u}_x \right).$$

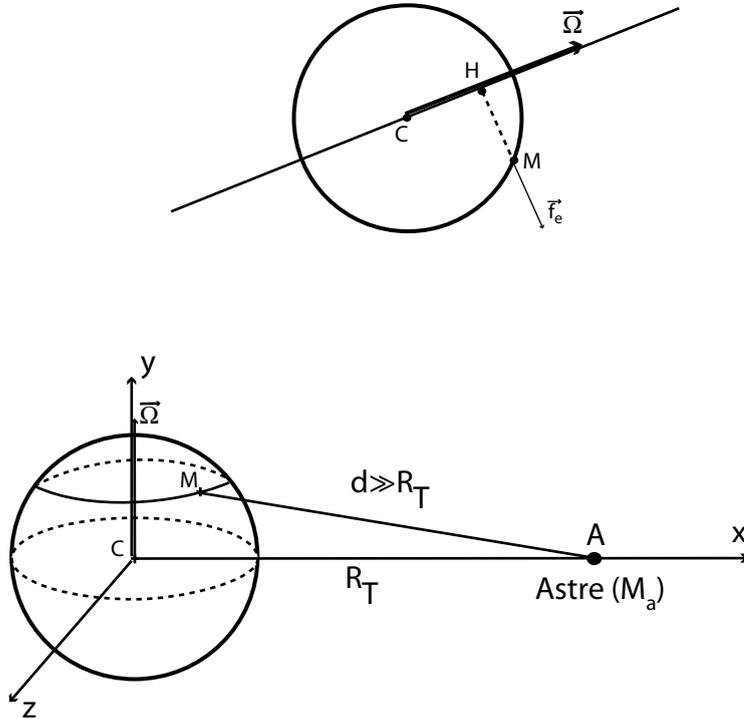


FIGURE 2.1 – Notations.

- Dans une unité arbitraire, le terme  $\frac{GM_a}{d^3}$  vaut environ 1.3 pour la Lune, 0.6 pour le Soleil,  $0.7 \cdot 10^{-5}$  pour Jupiter,... On voit donc que la Lune a une influence 2 fois plus importante que celle du Soleil et que les autres planètes n'interviennent pratiquement pas.
- À cause de la rotation de la Terre dans  $Cxyz$ ,  $x = x(M)$  varie sinusoïdalement et présente deux extrêmums par jour (marées biquotidiennes).
- Les marées peuvent être plus ou moins importantes suivant que le Soleil et la Lune (selon leur position relative) ajoutent leurs effets (vives-eaux) ou se contrarient (mortes-eaux).
- Il faudrait compléter l'étude précédente par des considérations dynamiques qui montrerait la possibilité de phénomènes de résonance (les masses d'eau des océans sont des oscillateurs excités par les marées périodiques) ce qui peut expliquer l'observation de marées très importante.

## 2.3 Mise en évidence de la rotation de la Terre

Nous avons vu que si l'on fait intervenir le poids, on tient compte des forces d'inertie d'entraînement et donc, dans ces conditions, la seule différence entre  $\mathcal{R}_T$  et un référentiel galiléen provient de l'existence de forces de Coriolis. Mais ces forces sont très faibles à cause de la petite vitesse de rotation de la Terre

$$\Omega = \vec{\Omega}_{\text{Terre}/\mathcal{R}_T} \approx \frac{1 \text{ tour}}{1 \text{ jour}} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

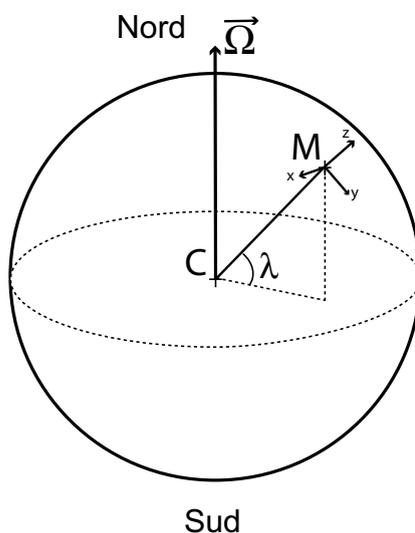


FIGURE 2.2 – Notations.

Par exemple, pour une vitesse  $V_{\mathcal{R}_T} \sim 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,

$$\frac{f_c}{mg} \sim \frac{2\Omega V_{\mathcal{R}_T}}{g} \sim 7 \cdot 10^{-4}.$$

Deux expériences classiques permettent de mettre en évidence l'existence de ces forces de Coriolis (et donc le caractère non galiléen de la Terre)

- la déviation vers l'est au cours d'une chute libre,
- le pendule de Foucault.

### 2.3.1 Déviation vers l'est

Le point matériel  $M$  est lâché, sans vitesse initiale en un point de latitude  $\lambda$  situé à la surface de la Terre. Ecrivons le PFD pour le point  $M$  en faisant l'approximation que  $\vec{g}$  passe par  $C$  et que  $\vec{\Omega}$  est porté par NS (Nord-Sud)

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) = m\vec{g} + (-2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}_T}(M)),$$

(point matériel soumis à son poids en tenant compte de la force de Coriolis), d'où

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Omega(\dot{z} \cos \lambda + \dot{y} \sin \lambda) \\ -2\Omega\dot{x} \sin \lambda \\ -g - 2\Omega\dot{x} \cos \lambda \end{pmatrix}.$$

En considérant  $\Omega$  comme un infiniment petit d'ordre 1, on voit qu'il n'y a que  $z(t)$  qui soit d'ordre 0. La méthode perturbative consiste à calculer la solution à l'ordre 0, pour ensuite la réinjecter dans les équations du mouvement et obtenir l'ordre 1. Soit une grandeur  $X$ , que l'on peut développer selon

$$X = X^{(0)} + X^{(1)} + \dots + X^{(n)} + \dots,$$

où  $X^{(n)}$  est le  $n^{\text{e}}$  ordre de  $X$  en  $\Omega$  (formellement,  $X^{(n)} = \mathcal{O}(\Omega^n)$ ). Le principe de la méthode perturbative est de calculer  $X^{(0)}$  en négligeant  $\Omega$ . Une fois cette solution obtenue, on pose

$$X = X^{(0)} + \delta X.$$

En injectant cette solution, l'ordre 0 en  $\Omega$  dans les équations va s'annuler (à cause du terme en  $X^{(0)}$ ). En ne gardant que les termes à l'ordre 1 en  $\Omega$ , on obtient une équation sur  $\delta X$  dont la solution va donner  $X^{(1)}$ , c'est à dire que l'on obtient un développement limité de  $X$  à l'ordre 1. On peut continuer ce processus jusqu'à l'ordre voulu.

Donc notre cas, à l'ordre 0, l'équation selon  $\vec{u}_z$  nous donne

$$\ddot{z} \approx -g \Rightarrow \dot{z} \approx -gt \text{ et donc } z \approx R - \frac{1}{2}gt^2.$$

En reportant dans les équations selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  et en ne gardant que l'ordre 1

$$\ddot{y} \approx 0 \Rightarrow \dot{y} \approx 0 \text{ et } \ddot{x} \approx 2\Omega(-gt) \cos \lambda \Rightarrow \dot{x} \approx -\Omega g \cos \lambda t^2 \Rightarrow x \approx -\frac{1}{3}\Omega g \cos \lambda t^3.$$

Pour une hauteur de chute  $h$ , le temps de chute est

$$T \approx \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

et donc

$$\delta x \approx -\frac{1}{3}\Omega g \cos \lambda \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Le signe  $(-)$  correspond bien à une déviation vers l'est par rapport à la verticale qui serait suivie si  $\mathcal{R}_T$  était galiléen.

### 2.3.2 Pendule de Foucault

Par rapport au cas précédent,  $M$  est soumis en plus à la tension du fil

$$\vec{T} = T \frac{\overrightarrow{MA}}{L},$$

où  $A$  est le point d'attache,  $M$  le point mobile et  $L$  la longueur du fil. Comme pour de petites oscillations,

$$\overrightarrow{MA} \approx -x\vec{u}_x - y\vec{u}_y + L\vec{u}_z,$$

on trouve alors

$$\vec{T} = \frac{T}{L}(-x\vec{u}_x - y\vec{u}_y + L\vec{u}_z).$$

En reportant dans les calculs précédents, on obtient

$$\ddot{x} = -\frac{T}{mL}x + 2\Omega(\dot{z} \cos \lambda + \dot{y} \sin \lambda), \quad (2.2)$$

$$\ddot{y} = -\frac{T}{mL}y - 2\Omega\dot{x} \sin \lambda, \quad (2.3)$$

$$\ddot{z} = -\frac{T}{m} - g - 2\Omega\dot{x} \cos \lambda. \quad (2.4)$$

En traitant  $\Omega$  comme un infiniment petit d'ordre 1, l'équation(2.4) nous permet d'écrire (puisque  $z \approx 0$ ) que  $\frac{T}{m} \approx -g$  et donc les équations restantes (2.3) et (2.4) fournissent, en posant

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{g}{L}},$$

d'où

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + 2\Omega \dot{y} \sin \lambda, \quad (2.5)$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y - 2\Omega \dot{x} \sin \lambda. \quad (2.6)$$

Pour résoudre ce système, on peut passer en complexes on posant

$$\xi = x + iy.$$

Alors (2.5)+(2.6) donne

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega \sin \lambda \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0.$$

Les racines de l'équation caractéristique s'écrivent

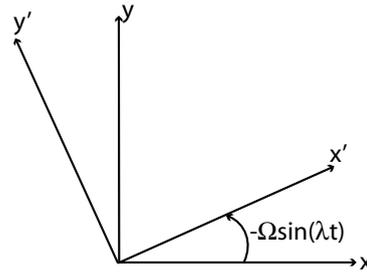
$$r = -i(\Omega \sin \lambda \pm \omega'),$$

en posant

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2 \sin^2 \lambda}.$$

D'où la solution générale

$$\xi(t) = e^{-i\Omega \sin \lambda t} (Ae^{i\omega' t} + Be^{-i\omega' t}).$$



Considérons alors le repère  $Ox'y'z$ , tournant dans  $Oxyz$  autour de  $Oz$  à la vitesse angulaire  $-\Omega \sin \lambda$

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\Omega \sin \lambda t) - y \sin(\Omega \sin \lambda t), \\ y' &= x \sin(\Omega \sin \lambda t) + y \cos(\Omega \sin \lambda t), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \xi' &= x' + iy' \\ &= (x + iy) (\cos(\Omega \sin \lambda t) + i \sin(\Omega \sin \lambda t)) \\ &= \xi e^{i\Omega \sin \lambda t}, \end{aligned}$$

d'où

$$\xi' = Ae^{i\omega' t} + Be^{-i\omega' t}.$$

Il est facile de voir que ces équations déterminent (dans  $Ox'y'z$ ) une trajectoire elliptique et donc que les axes de cette ellipse tournent dans  $Oxyz$  (le sol) à la vitesse angulaire  $-\Omega \sin \lambda$ .

Si  $\mathcal{R}_T$  était galiléen, les axes de la trajectoire resteraient fixes dans  $\mathcal{R}_T$ .

*La rotation de la trajectoire du pendule pour un observateur terrestre est une preuve de la rotation diurne de la Terre.*

# 3 Collisions en mécanique classique

## 3.1 Généralités sur les collisions en mécanique

Considérons un système mécanique soumis<sup>1</sup> à une force extérieure  $\vec{F}$  et un moment  $\vec{M}(O)$  en  $O$  agissant pendant une durée  $\Delta t$ .  $\vec{F}$  et  $\vec{M}(O)$  contiennent les forces d'inertie si le référentiel d'observation n'est pas galiléen.

Pour calculer les variations  $\Delta\vec{p}$  et  $\Delta\vec{L}(O)$  de la quantité de mouvement du système et de son moment cinétique en  $O$  pendant  $\Delta t$ , on utilise

- le théorème de la résultante cinétique (PFD)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \implies \Delta\vec{p} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F} dt,$$

- le théorème du moment cinétique en  $O$

$$\frac{d\vec{L}(O)}{dt} = \vec{M}(O) \implies \Delta\vec{L}(O) = \int_t^{t+\Delta t} \vec{M}(O) dt.$$

Si  $\vec{F}$  et  $\vec{M}(O)$  sont suffisamment grands pour que les intégrales précédentes tendent vers une limite non nulle lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$  (en réalité  $\Delta t$  doit être très petit devant le temps caractéristique d'évolution du système), on observera une modification brusque des vitesses sans changement de la position du système.

*Lorsqu'on observe une telle "discontinuité" des vitesses, on dit que le système est le siège d'une **collision** (ou d'un **choc**).*

Les forces de champ (pesanteur,...) ainsi que les forces d'inertie restent finies et n'apportent donc aucune contribution aux intégrales précédentes.

Lorsqu'il y a choc, c'est qu'il existe d'autres forces (en général à courte portée comme par exemple des forces de contact) qui prennent des valeurs très grandes pendant des durées très faibles : ce sont les "forces de choc".

- *En l'absence de forces de choc, la vitesse de tous les points du système reste continue, et ceci dans tout référentiel.*
- *Si les forces de choc sont intérieures à un système alors la quantité de mouvement et le moment cinétique de ce système restent continus dans tous référentiel.*

---

1. On parle aussi de torseur de forces extérieures

$$[\vec{F}] = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M}(O) \end{array} \right\}.$$

Le formalisme des torseurs est adapté à la mécanique, et se révèle être très puissant. Il n'est cependant pas utile à l'agrégation de chimie. Un torseur est un *champ de vecteurs*  $\vec{M}$

$$P, t \longrightarrow \vec{M}(P, t)$$

qui présente la propriété fondamentale suivante : il existe un vecteur  $\vec{R}(t)$  tel que

$$\forall P, Q, t \quad \vec{M}(Q, t) = \vec{M}(P, t) + \vec{R}(t) \wedge \vec{PQ},$$

où  $\vec{M}(P, t)$  est le *moment* du torseur en  $P$  et  $\vec{R}(t)$  est la *résultante* du torseur.

## 3.2 Lois des collisions, définitions

Deux particules matérielles (ou plus) considérées comme ponctuelles rentrent en interaction *intense* (force de choc), pendant une durée *très brève* dans une région *peu étendue* de l'espace.

Le problème général est alors le suivant : supposant connues toutes les vitesses  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$  *immédiatement* avant l'interaction (avant le choc), quelles sont les vitesses  $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots$  *immédiatement* après le choc ?

*Remarque* : Si l'on connaît pas de façon précise la nature de l'interaction, on ne pourra pas, en général, résoudre complètement le problème : **c'est ce que l'on appelle l'indétermination du choc.**

### 3.2.1 Lois du choc

En prenant comme système la *totalité* des particules qui interagissent, les forces de choc deviennent *intérieures* et il ne subsiste dans les forces extérieures que des forces permanentes dont la contribution à la variation de la quantité de mouvement est nulle.

D'un point de vue énergétique, en admettant que les forces de choc soient conservatives (elles dérivent d'une énergie potentielle  $E_p$ ), la variation de l'énergie totale du système  $E = E_c + E_p + U$  est égal au travail des forces extérieures autres que celles du choc qui est nul car le déplacement des particules est nul pendant le choc. Pour la même raison, il n'y a, au cours du choc, aucune variation d'énergie potentielle.

On a donc pour le système, au cours de la collision, et ceci dans tout référentiel

- conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique en tout point,
- conservation de l'énergie totale ou encore de la quantité  $E_c + U$ .

**Ce sont les lois du choc.**

### 3.2.2 Les référentiels utilisés

**référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}_L$**

C'est celui dans lequel une particule mobile (1) vient "heurter" une particule cible *au repos* (2).

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + \vec{0} &= m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2, \\ E_1 + E_2 &= E'_1 + E'_2. \end{aligned}$$

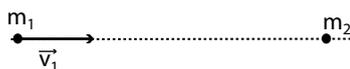


FIGURE 3.1 – Dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}_L$ .

**référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$**

C'est celui dans lequel la quantité de mouvement du système (ensemble de particules) est nulle immédiatement avant le choc ; elle est donc nulle également immédiatement après le choc.

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* &= m_1 \vec{v}'_1^* + m_2 \vec{v}'_2^*, \\ E_1^* + E_2^* &= E_1'^* + E_2'^*. \end{aligned}$$

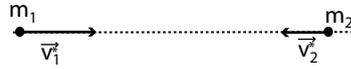


FIGURE 3.2 – Dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$ .

### 3.2.3 Nature du choc

**Choc élastique** Lorsque les particules après le choc sont identiques aux particules initiales (même nature, même énergie interne,...), la conservation de l'énergie totale implique la *conservation de l'énergie cinétique dans tous les référentiels*. On dit que la collision est élastique

$$E'_c = E_c.$$

Dans le cas contraire, on dit que la collision est *inélastique*. Il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique.

**Choc direct** Lorsque toutes les vitesses (avant et après le choc) sont colinéaire, on dit que la collision est *directe* ; elle est *indirecte* dans le cas contraire.

## 3.3 Collisions élastiques

### 3.3.1 Choc direct

**Détermination des vitesses après le choc dans  $\mathcal{R}_L$**  Les lois du choc fournissent deux équations scalaires qui permettent (dans ce cas particulier) de résoudre complètement le problème

$$\begin{cases} m_1 v_1 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 (v'_1 - v_1) &= -m_2 v'_2 \\ m_1 (v'^2_1 - v_1^2) &= -m_2 v'^2_2 \end{cases}$$

En divisant membre à membre, il vient

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ et } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

**Perte d'énergie cinétique  $Q$  de la particule 1**

$$Q = -\Delta E_{c1} = \Delta E_{c2} = \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{c1}.$$

Pour une particule incidente donnée ( $m_1$  et  $E_{c1}$  données), la perte d'énergie cinétique de la particule 1 (donc le transfert d'énergie à la particule 2) est maximum lorsque  $m_2 = m_1$ .

### 3.3.2 Diffusion élastique d'une particule incidente par une cible immobile

Le nombre d'inconnues est maintenant trop grand si l'on ignore la loi d'interaction et il y a une indétermination.

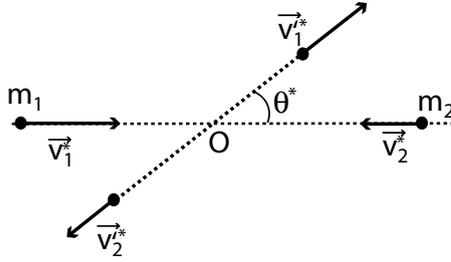


FIGURE 3.3 – Dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$ .

**Étude dans le RCM  $\mathcal{R}^*$**  On peut écrire

— conservation de  $p^* = 0$

$$m_1 \vec{v}_1^{*'} + m_2 \vec{v}_2^{*'} = m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = 0,$$

soit en norme

$$m_1 v_1^{*'} = m_1 v_2^{*'} \text{ et } m_1 v_1^* = m_1 v_2^*$$

— conservation de  $E^*$  (le terme d'énergie potentielle étant nul)

$$m_1 \vec{v}_1^{*2} + m_2 \vec{v}_2^{*2} = m_1 \vec{v}_1^{*2} + m_2 \vec{v}_2^{*2}$$

soit

$$m_1 (\vec{v}_1^{*2} - \vec{v}_1^{*2}) = m_2 (\vec{v}_1^{*2} - \vec{v}_1^{*2}),$$

et on en déduit facilement que  $v_1^{*'} = v_1^*$  et  $v_2^{*'} = v_2^*$ .

*Dans  $\mathcal{R}^*$ , chaque particule conserve sa vitesse.*

L'indétermination concerne l'angle de diffusion  $\theta^*$ .

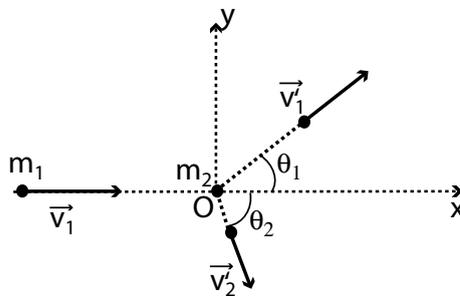


FIGURE 3.4 – Dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}_L$ .

**Retour dans  $\mathcal{R}_L$**  Si  $\vec{U}$  désigne la vitesse de  $\mathcal{R}^*$  par rapport à  $\mathcal{R}_L$ , on doit toujours avoir  $\vec{p}^* = 0$  soit (composition des vitesses)

$$m_1 (\vec{v}_1 - \vec{U}) + m_2 (\vec{v}_2 - \vec{U}) = 0,$$

or  $v_2 = 0$ , donc

$$\vec{U} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

On en déduit par exemple  $\vec{v}'_1$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_1^* + \vec{U}.$$

Pour obtenir la relation entre l'angle de diffusion  $\theta^*$  dans  $\mathcal{R}^*$  et les angles  $\theta_1$  (angle de diffusion) et  $\theta_2$  (angle de recul) dans  $\mathcal{R}_L$ , il suffit de projeter la relation précédente sur  $Ox$  et  $Oy$

$$\begin{cases} v'_1 \cos \theta_1 = v'_1{}^* \cos \theta^* + U \\ v'_1 \sin \theta_1 = v'_1{}^* \sin \theta^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_1 \cos \theta_1 = v_1^* \cos \theta^* + U \\ v'_1 \sin \theta_1 = v_1^* \sin \theta^* \end{cases}$$

soit

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + \frac{U}{v_1^*}} = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + \frac{U}{v_1 - U}} = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + \frac{m_1}{m_2}}.$$

On trouverait de même en projetant la relation  $\vec{v}'_2 = \vec{v}'_2^* + \vec{U}$

$$\tan \theta_2 = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* - 1},$$

car  $v_2^* = \|\vec{v}_2^*\| = \|\vec{v}_2 - \vec{U}\| = U$ .

Dans le cas particuliers où  $m_1 = m_2$ , il vient immédiatement  $\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2 = -1$  soit

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{\pi}{2}.$$

*Les trajectoires des particules après le choc sont perpendiculaires.*

### 3.4 Collisions inélastiques

Il n'y a plus, par définition, conservation de l'énergie cinétique. Avec  $E'_c = E'_{c1} + E'_{c2}$  et  $E_c = E_{c1} + E_{c2}$ ,  $E'_c \neq E_c$ .

Dans le cas où les particules sont "liées" après le choc, on parle de *choc mou*. Elles forment alors un troisième objet et donc ont la même vitesse.

*Cas particuliers : choc mou sur une cible au repos* On a alors, dans  $\mathcal{R}_L$

$$\vec{v}_2 = \vec{0}, \vec{v}'_2 = \vec{v}'_1 = \vec{v}'.$$

Écrivons la conservation de la quantité de mouvement

$$m_1 \vec{v}_1 = (m_1 + m_2) \vec{v}'.$$

On en déduit les vitesses après le choc

$$\vec{v}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1.$$

Calculons la variation relative d'énergie cinétique de l'ensemble

$$\frac{\Delta E_c}{E_c} = \frac{E'_c - E_c}{E_c} = \frac{(m_1 + m_2)v'^2 - m_1 v_1^2}{m_1 v_1^2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

- si  $m_2 \ll m_1$ , la variation d'énergie cinétique est faible : la vitesse après le choc est importante,
- si  $m_2 \gg m_1$ , la variation d'énergie cinétique est grande : la vitesse après le choc est faible.

# 4 Introduction à la relativité

---

Ce chapitre est très largement inspiré du cours de L3 d'Électromagnétisme et Relativité de Jean-Michel Raimond, dispensé au Magistère de Physique de l'ENS. Le polycopié complet de ce cours est téléchargeable sur <http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/electroma>.

## 4.1 Nécessité du principe de relativité

### 4.1.1 Rappels de relativité galiléenne

La notion centrale de la cinématique est celle de référentiel. Un référentiel, c'est un ensemble d'observateurs, immobiles les uns par rapports aux autres. Ces observateurs peuvent constater le passage du mobile à leur position. La connaissance de la position des observateurs concernés permet alors de déterminer la trajectoire du mobile. On peut bien sûr convenir d'un repère pour repérer ces positions au moyen de trois coordonnées d'espace. Chaque observateur est muni d'une horloge, permettant de noter l'instant auquel le mobile passe en face d'eux. Nous supposons que toutes les horloges de tous les observateurs d'un même référentiel sont synchronisées (indiquent la même valeur au même instant).

En cinématique classique, cette synchronisation ne pose aucune difficulté, puisque temps et espace sont complètement découplés. Il suffit, par exemple, que tous les observateurs se retrouvent en un même point pour faire le zéro de leurs horloges à un moment commun.

Un mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est alors défini par les trois fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  représentant la position en fonction du temps commun des observateurs. Le mouvement serait décrit dans un autre référentiel  $\mathcal{R}'$ , en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ , par trois autres fonctions du temps commun des observateurs de  $\mathcal{R}'$  :  $x'(t')$ ,  $y'(t')$ ,  $z'(t')$ . En mécanique classique, on admet sans restrictions l'identité des temps des observateurs de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  (cette hypothèse était déjà faite explicitement par Newton dans ses *Principia*). Il est alors possible de donner la transformation qui fait se correspondre les mouvement vus dans deux référentiels différents.

Dans le cas le plus simple, où les deux référentiels sont en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, cette transformation est la transformation dite de Galilée. Sans restreindre du tout la généralité, on peut choisir les axes dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  (voir fig. 4.1) de telle manière que :

- les axes  $Ox$  et  $O'x'$  coïncident à tout instant et sont parallèles à la vitesse  $\mathbf{u}$  de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ,
- les origines  $O$  et  $O'$  sont confondues à l'instant  $t = 0$ ,
- les axes  $Oy$  et  $O'y'$ , d'une part, et les axes  $Oz$  et  $O'z'$ , d'autre part, sont constamment parallèles et coïncident à  $t = 0$ .

La loi de transformation de Galilée s'écrit alors trivialement

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t) - ut, \\y'(t) &= y(t), \\z'(t) &= z(t).\end{aligned}$$

### 4.1.2 Difficulté des la cinématique classique

La loi de composition des vitesses, telle que nous venons de la rappeler, est difficilement compatible avec l'électromagnétisme de Maxwell. La conséquence la plus importante des

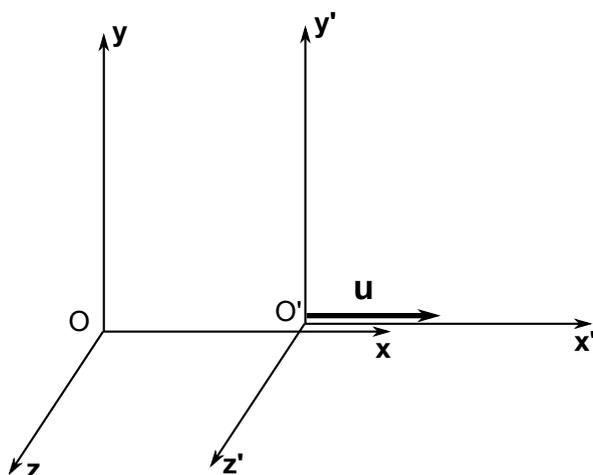


FIGURE 4.1 – Choix des axes dans deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  en mouvement relatif.

équations de Maxwell est en effet la prédiction de l'existence d'ondes se propageant à la vitesse  $c$ . Le problème qui apparaît immédiatement est celui du référentiel dans lequel cette vitesse est définie, le seul donc dans lequel les équations de Maxwell seraient directement applicables.

Le sentiment le plus naturel, qui prédominait très largement à la fin du siècle dernier, était que les ondes électromagnétiques se propageaient dans un milieu baignant l'univers entier : *l'éther*. L'analogie entre ondes électromagnétiques et ondes sonores était en effet présente à tous les esprits. Les difficultés apparaissent toutefois très vite dès qu'on examine les propriétés de cet hypothétique éther. Il doit en effet être omniprésent et infiniment rigide pour propager des ébranlements transverses à grande vitesse. Mais il doit, dans le même temps, être impondérable et infiniment perméable au mouvement des corps matériels (puisque, par exemple, l'étude sur quelques siècles de la rotation terrestre ne révèle aucun frottement).

Enfin, des difficultés expérimentales ont joué un rôle majeur dans la genèse de la théorie de la relativité, particulier l'expérience de Michelson-Morley qui aurait dû mettre en évidence le mouvement relatif de l'éther par rapport à la Terre mais n'y parvint jamais.

C'est en 1905 qu'Einstein ouvrit la voie d'une nouvelle théorie dans son célèbre article "Sur l'électrodynamique des corps en mouvement". Le principe fondamental de cette nouvelle physique, le "principe de relativité" est exposé dans la prochaine section.

### 4.1.3 Principe de relativité

#### Énoncé

*Il existe une classe de référentiels privilégiés, en translation uniforme les uns par rapport aux autres (que nous continuerons à appeler "référentiels galiléens"), dans lesquels toutes les lois de la physique prennent la même forme.*

En particulier, si toutes les lois de la physique prennent la même forme, les équations de Maxwell sont valides dans tous les référentiels et la vitesse de la lumière  $c$  est la même dans tous les référentiels.

#### 4.1.4 Expériences mettant en évidence l'invariance de la vitesse de la lumière

**Expérience du prisme mobile d'Arago (1810)** En 1810, François Arago présente à l'Académie des Sciences un compte-rendu sur le vitesse de la lumière. L'expérience consiste à mesurer une variation de la déviation de la lumière dans un prisme. Pour cela, il observait les étoiles pendant la nuit. Selon l'heure d'observation, en raison du mouvement relatif de la Terre par rapport aux étoiles, la déviation devait varier et correspondre à une augmentation ou une diminution relative de  $1/10000$  de la vitesse de la lumière. La sensibilité du dispositif était suffisante pour détecter une telle variation mais il n'en observa aucune.

**Expérience de Michelson Morley (1887)** On supposait à l'époque que la vitesse de la lumière par rapport à l'"éther", un milieu hypothétique, était égale à  $c$ . Le but de l'expérience était de mettre en évidence le mouvement relatif de la Terre par rapport à l'éther. Le mouvement de la Terre sur son orbite par rapport au Soleil s'effectue à  $30 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ . Ainsi, suivant la manière dont s'effectue la composition des vitesses avec la lumière (ou l'éther), la vitesse de la lumière devrait être soit plus grande soit plus faible de  $30 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$  dans le référentiel terrestre. Les variations relatives de la vitesse seraient alors de l'ordre de  $10^{-4}$ . Michelson proposa une méthode optique, interférométrique pour mesurer une telle variation.

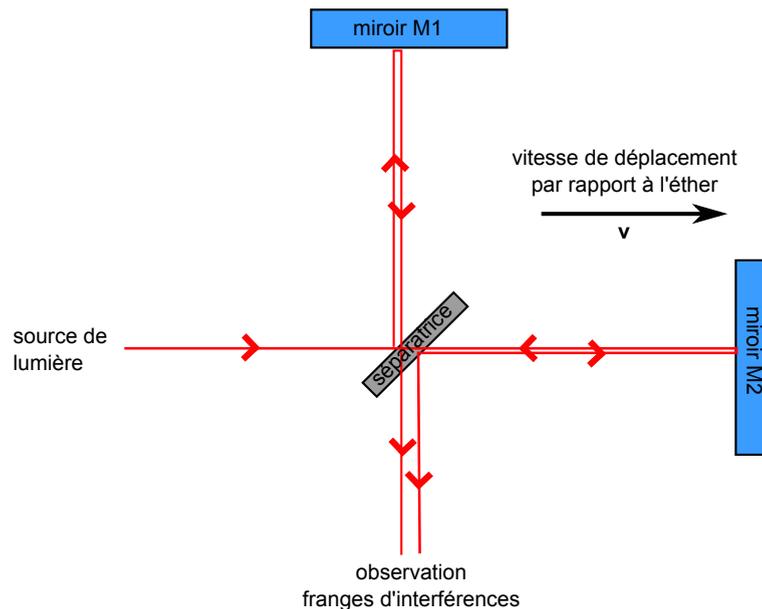


FIGURE 4.2 – Interféromètre de Michelson. Un des deux bras est supposé être aligné avec le vecteur vitesse de déplacement de la Terre par rapport au Soleil.

Un interféromètre de Michelson fut alors construit (voir fig. 4.2). Suivant la différence de marche entre les deux bras de l'interféromètre (*cf.* TD optique), on obtient de franges d'interférence à la sortie de l'interféromètre. Si la lumière suit les lois de la mécanique classique, le temps mis par la lumière pour parcourir un aller-retour dans un bras va dépendre de la vitesse de la lumière dans ce bras et donc de l'alignement ou non du bras avec la direction de la vitesse de la Terre par rapport au Soleil. Donc, si on fait tourner l'interféromètre, on s'attend à voir un défilement des franges. Le dispositif était placé sur

un bloc de pierre, elle même reposant sur une pièce en bois placé dans un bain de mercure (taille de l'ordre du mètre pour chaque bras). On peut montrer que, si on note  $\mathbf{v}$  la vitesse du laboratoire par rapport à l'éther, la différence des durées de parcours de la lumière dans les deux bras est de

$$\Delta t \approx \frac{v^2}{c^3} (L_1 + L_2),$$

où  $L_1$ , resp.  $L_2$ , est la longueur du bras du miroir  $M_1$ , resp.  $M_2$ . En utilisant un repliement astucieux des rayons, la longueur des bras était de l'ordre de 1 mètres, et pour une longueur d'onde de 550nm, on s'attend à un défilement de 0,4 frange en faisant tourner le dispositif. Si la sensibilité permettait de détecter une variation de l'ordre de 0,01 frange, ils n'ont jamais observé de défilement de franges.

C'est à partir de cet échec que les physiciens se ont sérieusement commencé à douter de l'existence de l'éther.

**Expérience d'Alväger (1964)** Cette expérience est plus récente, et a été effectuée au CERN en utilisant un faisceau de particules, des pions neutres  $\Pi^0$ . Ils sont produits par l'entrée en collision de protons de haute énergie sur une cible en Béryllium. Ces pions ont une énergie de 6 GeV, et une vitesse voisine de  $0.99975c$ . Cette particule instable a une durée de vie de l'ordre de  $0.84 \cdot 10^{-16}$  s. Elle se désintègre en deux photons  $\gamma$  selon  $\Pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ . On dispose ainsi d'une source de lumière qui se déplace à une vitesse de  $0.99975c$  par rapport au référentiel du laboratoire.

Les expérimentateurs ont mesuré le temps mis par des "paquets" de photons pour parcourir la distance entre deux détecteurs A et B ( $31.450 \pm 0.0015$  mètres). ils trouvèrent 104.9 ns, et ont donc constaté que la vitesse de ces photons est la même (à  $10^{-4}$  près) que ceux issus d'une source immobile, c'est-à-dire l'invariance relativiste de la vitesse de la lumière.

## 4.2 Temps propre et dilatation des durées

### 4.2.1 Temps propre et dilatation des durées

Considérons deux référentiels en mouvement relatif, avec la géométrie de la figure 4.1. Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , un émetteur de pulses lumineux très courts est immobile, avec un miroir en face de lui à une distance  $d$ . Cet émetteur peut également fonctionner comme détecteur de ces pulses lumineux. Dans  $\mathcal{R}'$ , l'impulsion lumineuse est détectée après un temps  $T' = 2d/c$ .

Considérons la même expérience dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Si on suppose la mécanique classique valide. La vitesse du pulse lumineux dans  $\mathcal{R}$  a une composante  $\pm c$  selon  $Oy$  et une composante  $u$  selon  $Ox$ . Son module est donc de  $\sqrt{c^2 + u^2}$ . La durée du parcours OM étant  $d/c$ , on a  $OH = ud/c$  et donc  $OM = L\sqrt{c^2 + u^2}/c$ . La durée de l'expérience est donc  $T = 2d/c$ . On retrouve le postulat d'universalité du temps en cinématique classique.

Admettons désormais le postulat de relativité. Le temps de parcours de OM est  $OM/c$ . On en déduit que  $OH = uOM/c$ . Et comme  $OM^2 = d^2 + OH^2$ , on obtient finalement

$$T = \gamma T', \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Le facteur  $\gamma$  est toujours supérieur à 1. La conséquence immédiate du postulat de relativité est que le temps n'est pas une notion universelle.

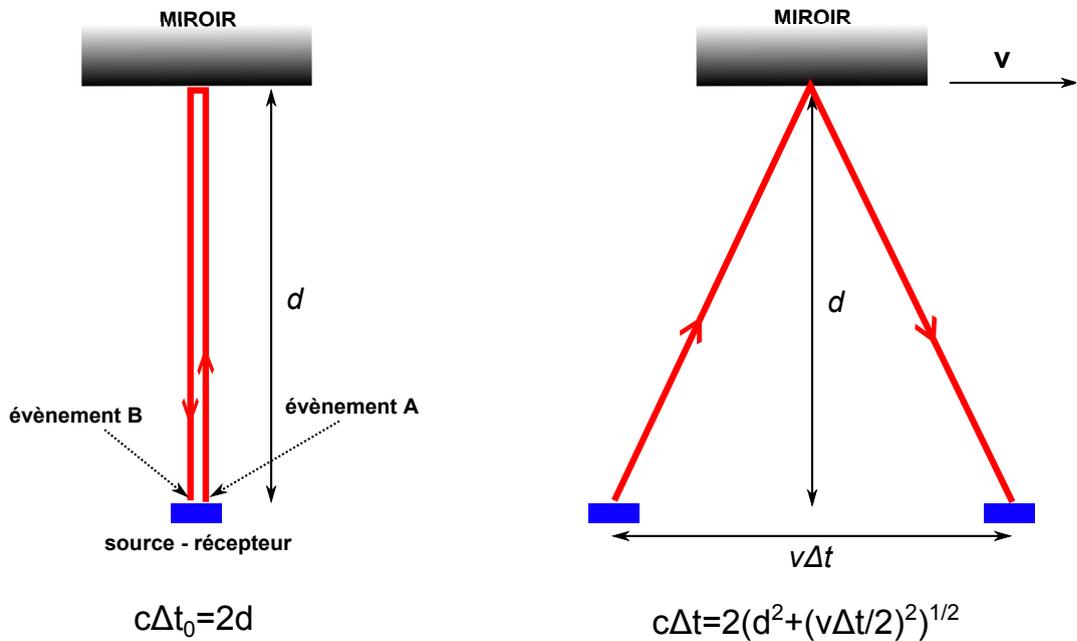


FIGURE 4.3 – "Horloges de lumière". On considère une source émettrice d'impulsion lumineuses, solidaire d'un miroir se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v}$  par rapport à un référentiel galiléen. On considère cette expérience du point de vue d'un observateur dans le référentiel du système { miroir-émetteur-récepteur }. La durée entre émission et réception est de  $\Delta t_0 = 2d/c$ . Dans le référentiel du laboratoire, on obtient en revanche  $c\Delta t = 2\sqrt{d^2 + (\frac{v\Delta t}{2})^2}$ . On en déduit aisément la relation illustrant la dilatation des temps par rapport au temps propre :  $\Delta t = \gamma\Delta t_0$  avec  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ .

Par ailleurs, le facteur  $\gamma$  n'existe que si la vitesse relative des deux référentiels est plus petite que  $c$ . Si ce n'était pas le cas, l'impulsion lumineuse qui se réfléchit normalement sur le miroir dans  $\mathcal{R}'$  n'arriverait jamais à rattraper ce miroir dans  $\mathcal{R}$ . Deux référentiels galiléens ne peuvent donc être animés l'un par rapport à l'autre d'une vitesse supérieure (ou même égale) à  $c$ . Comme on peut attacher un référentiel galiléen à tout objet en translation uniforme,  $c$  apparaît aussi comme une vitesse limite pour tous les objets matériels.

**Le temps propre correspond au temps dans le référentiel où l'"horloge" (une particule) est immobile. Le temps mesuré dans un autre référentiel sera toujours supérieur ou égal au temps temps. C'est pour cela qu'on parle de dilatation des durées.**

#### 4.2.2 Définition de la seconde

D'après le BIPM (Bureau Internationale du Poids et des Mesures), la seconde est définie de la manière suivante :

*La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental.*

Cette définition se réfère à un atome de césium au repos, à une température de 0K. Pour la réalisation pratique de la définition de l'unité de temps, une annexe précise que pour l'horloge atomique, "La définition de la seconde doit être comprise comme la définition

de l'unité de temps propre : elle s'applique dans un petit domaine spatial qui accompagne l'atome de césium dans son mouvement". Les corrections de relativité restreinte sont explicitement évoquées dans la définition de la seconde.

### 4.2.3 Notion d'évènement

Comme nous venons de le voir, le temps n'est plus universel et n'est plus séparable des coordonnées spatiales. Il faudra décrire les expériences en termes d'évènements, *i.e.* il s'est passé quelque chose quelque part. Un évènement, c'est par exemple l'allumage du signal A ou la réflexion de la lumière sur le miroir dans notre expérience de pensée. On peut caractériser un évènement par quatre nombres : les coordonnées spatiales de l'observateur et le temps, *i.e.* la donnée d'un quadruplet de nombres  $(ct, x, y, z)$ , où le facteur  $c$  est rajouté pour avoir un objet homogène. Les coordonnées spatio-temporelles du même évènement dans un autre référentiel sont différentes, et le lien entre elles est donné par une transformation qui remplace la transformation de Galilée.

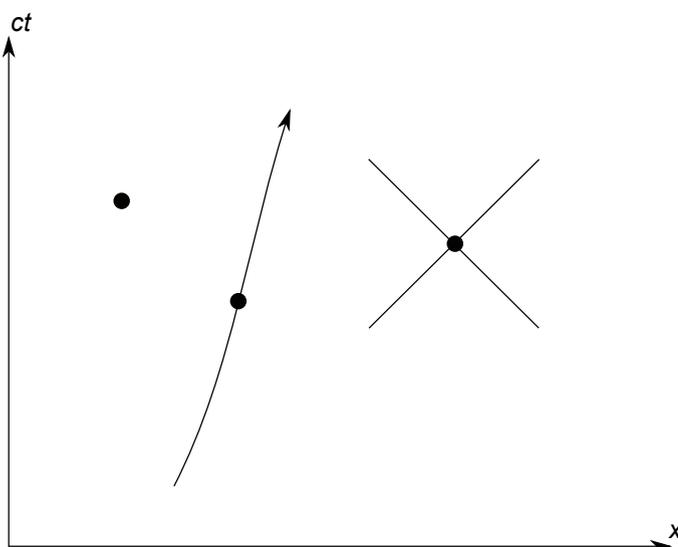


FIGURE 4.4 – Un évènement, une ligne d'univers et un cône de lumière. Un évènement est représenté par un point dans un espace  $x, ct$ . Une ligne d'univers est l'ensemble des évènements correspondant aux positions successives d'une particule. Le cône de lumière d'un évènement est constitué des lignes d'univers d'un signal lumineux passant par cet évènement.

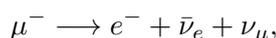
On utilise souvent des représentations géométriques des évènements. On peut représenter un évènement comme un point dans un espace à quatre dimensions. Par simplicité, on se limitera à une dimension d'espace. On représente alors un évènement comme sur la figure 4.4. Pour des raisons de commodité, l'axe vertical porte le produit  $ct$  et les deux coordonnées ont ainsi la même dimension. On peut alors considérer le mouvement d'un point dans un référentiel comme une suite d'évènements. Une telle suite forme dans l'espace-temps une ligne, appelée "ligne d'univers". La ligne d'univers d'une particule qui se déplacerait à la vitesse de la lumière serait parallèle, à la première ou à la deuxième bissectrice. Dans l'espace à quatre dimensions, l'ensemble des lignes d'univers partant d'un point et correspondant à un mouvement à  $c$  forme le "cône de lumière" de cet évènement. Les évènements antérieurs à l'évènement de référence forment le passé du cône de lumière, les autres le futur. Comme

$c$  est une vitesse limite, toutes les lignes d'univers passant par un évènement donné doivent être à l'intérieur du cône de lumière. Deux évènements ne pourront être reliés par un signal ou une relation causale, que s'ils sont dans le cône de lumière l'un de l'autre.

### 4.3 Mise en évidence expérimentale de la dilatation des durées

#### 4.3.1 Muons cosmiques : expérience de D.H. Frisch et J.H. Smith

Les muons sont des particules instables qui se désintègrent en un électron ou un positron en produisant des neutrinos. Par exemple, pour un muon négatif, on peut écrire la réaction sous la forme suivante :



où  $\mu^-$  désigne le muon négatif,  $e^-$  l'électron,  $\bar{\nu}_e$  l'anti-neutrino électronique et  $\nu_\mu$  le neutrino muonique. La durée de vie des muons au repos vaut  $\tau_0 = 2.2 \mu\text{s}$ . Il s'agit de la durée de vie dans le référentiel où les muons sont au repos, se désintégrant selon une loi exponentielle  $N(t) = N_0 e^{-t/\tau_0}$ .

Les muons cosmiques sont produits par les rayons cosmiques, essentiellement des protons, qui rentrent en collision avec les molécules de la haute atmosphère, ce qui crée des particules en cascade. L'expérience de Frisch et Smith, réalisée en 1963, consiste à compter les muons qui se désintègrent dans un détecteur conçu pour sélectionner des muons de vitesses comprises dans une tranche fixée au voisinage de  $0.993c$ , pendant une durée déterminée. Deux capteurs sont installés respectivement au sommet du mont Washington à une altitude de  $h = 1900\text{m}$  environ et d'autre part à Cambridge au niveau de la mer. En effectuant des comptages pendant une durée d'une heure, Frisch et Smith ont mesuré au sommet du mont Washington  $N_1 = 563 \pm 10$  désintégrations et au niveau de la mer  $N_2 = 408 \pm 9$  désintégrations. La vitesse moyenne des muons sélectionnés est de  $0.993c$ , ce qui donne un coefficient  $\gamma = 8.4 \pm 2$  (Pour plus de détails, voir *American Journal of Physics*, **31**, 342 (1963)).

Soit  $\tau$  la durée de vie des muons cosmiques mesurée dans le référentiel du laboratoire. La durée mise pour parcourir une distance  $h$  est égale à  $h/0.993c$ . On peut effectuer une détermination de  $\tau$  à partir des valeurs de  $N_1$  et  $N_2$ , pour obtenir  $\tau \approx 19.8 \mu\text{s}$ . L'utilisation de la formule de dilatation des durées  $\tau = \gamma\tau_0$  permet une seconde détermination de  $\gamma$  à environ 9 (plus précisément  $\gamma = 8.8 \pm 0.8$ ).

Cette valeur est compatible avec la première et constitue une preuve de la dilatation des durées.

#### 4.3.2 Horloges atomiques embarquées : expérience de Hafele et Keating

En 1971, Hafele et Keating ont fait voler quatre horloges au Césium à bord d'avions commerciaux et comparé leurs indications avec celle d'une référence au repos à l'Observatoire naval de Washington. Deux parcours ont été empruntés par les quatre horloges : le premier vers l'est a duré 65.4 heures et le second vers l'ouest et a duré 41.2 heures. La durée totale de l'observation du rythme des quatre horloges atomiques s'est étendue sur plus de 600 heures.

Ils ont obtenus les écarts à la référence sur Terre suivants :

|                     | $\Delta\tau$ (ns) mesuré | $\Delta\tau$ (ns) calculé |
|---------------------|--------------------------|---------------------------|
| voyage vers l'est   | $-59 \pm 10$             | $-40 \pm 23$              |
| voyage vers l'ouest | $+273 \pm 7$             | $+275 \pm 21$             |

Le signe négatif indique que les horloges voyageant vers l'est ont pris du retard par rapport à celle restée sur Terre.

### 4.3.3 GPS et relativité

Le principe du GPS repose sur un ensemble de 24 satellites, chacun muni d'une horloge précise. Pour se repérer, il faut être en mesure de réceptionner le signal envoyé par au moins trois de ces satellites.

Pour simplifier le problème, considérons le problème à une dimension. On considère un observateur désirent se localiser, disposant d'une horloge précise mais pas forcément synchronisée avec les horloges de deux balises entre lesquelles il se situe. On note A et B ces deux balises. Ces balises définissent un axe sur lequel se trouve l'observateur, à la distance  $d_A$  de la balise A. Les deux balises sont distantes de  $d$ , et ont été préalablement synchronisées.

À l'instant  $t_A$ , la balise A émet un signal lumineux qui est reçu par le promeneur à une date  $t'_{AM}$  mesuré par l'horloge locale du promeneur qui peut être en retard ou en avance de  $\tau$  par rapport au temps des balises : on a  $t' = t + \tau$ . On définit de même les dates  $t_B$  et  $t'_{BM}$  pour la balise B. On obtient alors la valeur de  $d_A$

$$d_A = \frac{d}{2} + \frac{c}{2} (\tau_{AM} - \tau_{BM}),$$

et donc l'observateur peut déterminer sa position en mesurant des durées. À la surface de la Terre, il est nécessaire d'utiliser quatre balises donc quatre satellites et un récepteur portatif pour déterminer sa position dans l'espace et disposer aussi de l'heure. C'est le principe utilisé pour le positionnement GPS.

Placés à une altitude de plus de 20 000 km, les satellites ont une vitesse de 3.87 km/s : ils ne constituent pas un réseau de balises fixes, ils sont mobiles par rapport au promeneur dont on désire obtenir la position. Pour évaluer les distances, il faut disposer à chaque instant des temps qu'indiqueraient des horloges fictives fixes par rapport au sol et se trouvant au même endroit que les satellites. C'est ici qu'intervient le phénomène de dilatation des durées : si un observateur terrestre mesure la période de l'horloge atomique d'un satellite, il mesurera une période toujours plus grande.

Si l'on souhaite se positionner au mètre près, il faut faire des mesures à moins de 30 ns près, ce qui impose d'utiliser des horloges très précises. Les corrections relatives, liées au phénomène de dilatation des durées, sont de l'ordre de  $\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$ , ce qui représente par exemple 83 ps par seconde, et donc les horloges embarquées retardent de 7.2  $\mu$ s par jour, ce qui, exprimé en terme de distance, représente une dérive de positionnement de plus de deux kilomètres par jour. On note bien que cette dérive doit impérativement être corrigée.

Il est nécessaire de prendre en compte un autre effet décrit par la relativité générale. Pour les horloges des satellites, la gravité est plus faible qu'au niveau du sol. Les horloges des satellites ont un rythme augmenté et donc avancent par rapport à celles situées au niveau du sol. Cette avance est de l'ordre de 45.7  $\mu$ s par jour.

Si l'on combine les deux effets précédents, on constate que les horloges des satellites avancent de  $47.7 - 7.2 = 38.5$   $\mu$ s par jour. En pratique, un synthétiseur de fréquence permet de compenser cette avance.

## 4.4 Une deuxième expérience de pensée : la simultanéité

On considère un train qui se déplace sur un axe donnée. Sur le quai, deux balises A et B peuvent émettre des impulsions lumineuses, et le chef de gare se situe à mi-chemin entre

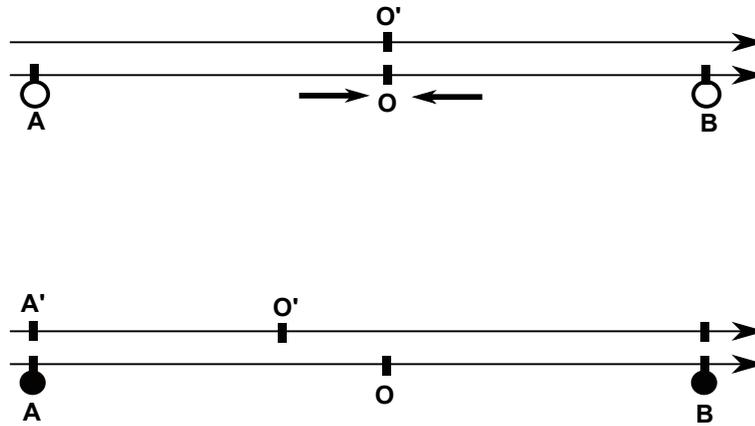


FIGURE 4.5 – Deuxième expérience de pensée illustrant le postulat de relativité. En haut, vue de la situation au moment où le chef de gare, situé en  $O$ , et le contrôleur, en  $O'$  voient arriver simultanément les signaux lumineux émis par A et B. En bas, situation au moment où les signaux se sont allumés.  $O'$  n'est pas encore arrivé en  $O$ . Les signaux s'allument en face des observateurs  $A'$  et  $B'$ .

les deux balises en  $O$ . Le quai forme alors un référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans le train, le contrôleur se situe en  $O'$ , immobile dans le train, formant le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à la vitesse  $u$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . A l'instant  $t = 0$ , le chef de gare voit les deux signaux A et B s'allumer simultanément. S'il fait, ou s'il mesure, que la même distance  $L$  le sépare des deux signaux, il en déduira qu'ils se sont allumés simultanément à l'instant  $t = -L/c$ . Au même instant  $t = t' = 0$ , le contrôleur, situé en  $O'$ , passe devant le chef de gare. Il voit donc, à cet instant précis, les deux signaux A et B s'allumer. Comment peut-il en déduire l'instant auquel ils se sont allumés (dans son échelle de temps, bien sûr) ? Il faut d'abord déterminer où les deux signaux se sont allumés dans son référentiel. Pour cela, il peut parcourir son train et rechercher les deux voyageurs  $A'$  et  $B'$  (les observateurs) qui étaient juste en face des signaux quand ils se sont allumés. Il pourra ensuite leur demander à quel instant cet événement s'est produit ou utiliser leur position et la vitesse de la lumière pour calculer cet instant.

Supposons d'abord que la cinématique classique s'applique. Le temps étant universel, les deux signaux s'allument dans  $\mathcal{R}'$  au même instant  $t' = -L/c$ . A cet instant  $O'$  est à une abscisse  $-uL/c$  par rapport à  $O$ . Les passagers  $A'$  et  $B'$  sont alors situés respectivement en  $x' = -L + uL/c$  et  $x' = L + uL/c$ . La distance  $A'O' = L(c - u)/c$  est donc inférieure à la distance  $B'O' = L(c + u)/c$ . En appliquant la procédure décrite ci-dessus, le contrôleur établira donc que les deux signaux se sont allumés au même instant. L'un était plus proche, mais la vitesse de l'autre impulsion était plus grande.

Que se passe-t-il maintenant si nous appliquons le principe de relativité ? La vitesse des deux impulsions lumineuses est la même. Nous ne pourrions pas, pour le moment, déterminer la position des observateurs  $A'$  et  $B'$  (il faut connaître la transformation de Lorentz). Nous pouvons, en revanche, comprendre que la distance  $A'O'$  est nécessairement inférieure à celui de l'autre. Le contrôleur en déduira que le signal A s'est allumé *après* le signal B. Deux événements peuvent être vus comme simultanés ou non par des observateurs appartenant à des référentiels différents.

### 4.4.1 Notion d'intervalle

Considérons deux événements repérés, dans un référentiel donné, par  $(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  et  $(ct_2, x_2, y_2, z_2)$ . Si ces deux événements sont sur le cône de lumière l'un de l'autre, ils peuvent être reliés par un signal lumineux se propageant à la vitesse  $c$ . On a donc dans ce cas

$$c^2(t_1 - t_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

On définit alors l'intervalle  $s_{1,2}$  entre ces deux événements selon

$$s_{1,2}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2.$$

L'intervalle joue le rôle d'une distance dans l'espace-temps. L'intervalle s'annule quand les deux événements sont sur le cône de lumière l'un de l'autre. Cette propriété est indépendante du référentiel : le fait pour deux événements d'être ou non reliés par un signal lumineux ne dépend pas de la description du mouvement. Un intervalle nul est donc un invariant dans un changement de référentiel.

- Si  $s_{1,2}^2 > 0$ , les deux événements peuvent être reliés par un signal se propageant moins vite que la lumière, il peut y avoir un lien de causalité entre eux. On parle d'intervalle du genre *temps*.
- Si  $s_{1,2}^2 < 0$ , aucun signal ne peut relier ces deux événements, ce qui exclut tout lien de causalité. On parle d'intervalle du genre *espace*.
- Si  $s_{1,2}^2 = 0$ , les deux événements peuvent être reliés par un signal se propageant à la vitesse de la lumière. On parle d'intervalle du genre *lumière*.

Pour deux événements infiniment proches, on définit un intervalle infinitésimal, dans le référentiel  $\mathcal{R}$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

**On peut montrer que l'intervalle infinitésimal est invariant par changement de référentiel.**

Considérons un intervalle de temps  $dt$  dans  $\mathcal{R}$ , où une particule se déplace de  $d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt$ . L'intervalle entre les deux événements correspondant vaut

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  où la particule est au repos, on a  $ds^2 = ds'^2 = c^2 dt'^2$ . On appelle alors "temps propre" l'intervalle de temps s'écoulant dans  $\mathcal{R}'$  et nous le noterons  $d\tau = dt'$ . On obtient alors

$$dt = \gamma d\tau, \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

On retrouve ainsi, de manière très générale, la dilatation des temps par rapport au temps propres, temps de référence dans le référentiel où la particule est au repos.

## 4.5 Dynamique relativiste

On peut montrer que, en relativité restreinte, une particule possède une énergie

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2$$

et une quantité de mouvement

$$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}.$$

**A faible vitesse**, on obtient  $\mathbf{p} \approx m\mathbf{v}$  et  $\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ . A une constante près, nous retrouvons bien l'énergie cinétique galiléenne. Si les énergies sont toujours définies à une constante additive près en mécanique classique, il n'en est pas de même en relativité (on ne fera pas la démonstration ici). L'énergie mécanique d'une particule au repos,  $\mathcal{E}_0 = mc^2$  a une signification physique. Si une masse au repos possède de l'énergie, cela indique qu'on peut, au moins sur un plan pur de bilan d'énergie, transformer une certaine quantité de masse en énergie ou une certaine quantité d'énergie en masse. Les applications les plus spectaculaires de ces conversions sont les créations et annihilations de particules élémentaires. Quand deux antiparticules s'annihilent en émettant de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique, on a conversion totale d'une certaine quantité de masse en énergie. Le phénomène réciproque, la création d'une paire particule/antiparticule à partir d'un rayonnement suffisamment énergétique, correspond à la conversion d'énergie en masse. Pour créer, par exemple, une paire électron/positron, il faudra au moins fournir une énergie  $2mc^2$ , soit 2 fois 511 keV. Cette notion de seuil de réaction joue un rôle essentiel pour l'analyse des collisions de particules. Enfin, compte-tenu de l'équivalence entre masse et énergie, il est courant de donner la valeur de la masse d'une particule en unité d'énergie par son énergie de masse. Par exemple, un électron a une masse de 511 keV signifie que  $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ .

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "Attribution - Pas d'utilisation commerciale - Pas de modification 4.0 International".



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>