
Mécanique

Kenneth Maussang
kenneth.maussang@ens.fr

Table des matières

1	Présentation des interactions et éléments de statique (BCPST 1)	1
2	Cinématique	4
3	Éléments de dynamique	12
4	Aspects énergétiques	16
5	★ Moment cinétique - dynamique d'un solide indéformable ★	23

1 Présentation des interactions et éléments de statique (BCPST 1)

1.1 Forces

1.1.1 Principe des actions réciproques

Énoncé On considère deux points matériels M_1 et M_2 , dont les forces d'interactions sont respectivement notées \vec{f}_{12} (force exercée par 2 sur 1) et \vec{f}_{21} .

Le principe des actions réciproques stipule que l'on a

$$\boxed{\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}},$$

et que les forces \vec{f}_{12} et \vec{f}_{21} sont portées par la droite passant par M_1M_2 .

1.1.2 Centre de masse (ou centre d'inertie)

On considère un système de points matériels de masse m_i situés à la position M_i . On définit le centre de masse du système G comme le barycentre des points M_i pondérés par leur masse m_i , c'est-à-dire

$$\left(\sum_i m_i\right) \vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OM}_i.$$

Pour un système formé par un milieu continu, de masse volumique $\rho(M)$, G est défini selon

$$\left(\int \rho(\vec{OM}) d^3OM\right) \vec{OG} = \int \rho(\vec{OM}) \vec{OM} d^3OM.$$

1.0.1 Exemples de forces

Force gravitationnelle Considérons deux masses m_1 et m_2 situées en M_1 et M_2 respectivement. Il existe alors une force gravitationnelle de m_1 sur m_2 selon

$$\vec{f}_{m_1 \rightarrow m_2} = \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}, \quad (1.1)$$

avec $\vec{u} = \overrightarrow{M_1 M_2} / r$, $r = M_1 M_2$ et $\mathcal{G} = 6.672 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

Force électrostatique de Coulomb Considérons deux charges ponctuelles q_1 en M_1 et q_2 en M_2 , on a alors

$$\vec{f}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}, \quad (1.2)$$

où ϵ_0 est la permittivité absolue.

Poids d'une particule Le poids \vec{P} d'une particule de masse m est lié au champ de pesanteur \vec{g} selon

$$\vec{P} = m\vec{g}. \quad (1.3)$$

Dans le cas de la Terre, une particule à l'altitude z est soumise à la pesanteur comme résultante de l'interaction gravitationnelle de la Terre, soit

$$\vec{P} = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{R_T^2} \frac{\vec{u}_z}{(1 + z/R_T)^2}, \quad (1.4)$$

où \vec{u}_z est la direction de la verticale locale, R_T le rayon terrestre, et M_T la masse de la Terre. Pour des points aux voisinages du sol, *i.e.* $z \ll R_T \approx 6400$ km, on aura donc

$$g = \mathcal{G} \frac{R_T}{R_T^2} \approx 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (1.5)$$

Force de rappel d'un ressort Soit un ressort de masse négligeable, de longueur au repos l_0 , suivant un axe de direction \vec{u} . Dans le régime linéaire, la force de rappel élastique suite à une élongation ou contraction de longueur l a pour expression

$$\vec{f} = -k(l - l_0)\vec{u}, \quad (1.6)$$

où \vec{u} est toujours dirigé suivant le sens de l'allongement du ressort.

Tension d'un fil La tension d'un fil est dirigée selon la direction définie par ce fil, tant que le fil est tendu. Sa valeur est arbitraire, dans la limite où le fil ne casse pas.

1.0.2 Forces réparties en volume

On considère un système \mathcal{S} de volume \mathcal{V} délimité par une surface Σ . Ce dernier est soumis à des actions mécaniques réparties en volume. Soit un élément de volume $d\tau$ de \mathcal{S} , de masse dm . Ce dernier est soumis à une force élémentaire $d\vec{f}$ telle que

$$d\vec{f} = \vec{f}_v d\tau,$$

où \vec{f}_v est la densité volumique de force. La résultante \vec{F} est alors

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{V}} \vec{f}_v d\tau$$

Exemple : soit ρ la masse volumique du système \mathcal{S} , et \vec{g} le champ de pesanteur supposé uniforme. La force de gravitation élémentaire est alors

$$d\vec{f} = \vec{g} dm = \rho \vec{g} d\tau.$$

Dans le cas d'un système \mathcal{S} de masse m , la résultante des forces de pesanteur est appelé son poids $\vec{P} = m\vec{g}$. Le poids s'applique au centre de masse G du système matériel.

1.1.3 Forces réparties en surface

Soit une paroi Σ séparant un fluide d'un milieu extérieur. Cette dernière va subir l'action de forces pressante. En un point M de cette surface, l'action mécanique peut être caractérisée par la pression $p(M)$. L'élément de surface $d\Sigma$ en M est alors soumis à la force élémentaire

$$d\vec{f} = p(M)\vec{n}d\Sigma,$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal, orienté vers l'extérieur du système fluide. La résultante des forces pressantes s'obtient comme la somme sur Σ des forces élémentaires

$$\vec{f} = \int_{\Sigma} p(M)\vec{n}d\Sigma.$$

Remarque : D'après le principe des actions réciproques, la paroi exerce sur le fluide une force opposée.

1.2 Moment d'une force par rapport à un axe

Soit un point matériel M , un axe Δ de vecteur directeur \vec{u}_{Δ} . Une force \vec{f} quelconque est appliqué en ce point M .

Au-delà du programme de BCPST, le moment d'une force en M par rapport à un point O est un vecteur défini par

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}.$$

1.3 Équilibre d'un solide

Les deux conditions nécessaires d'équilibre d'un solide, soumis à l'action des forces extérieures \vec{f}_k , sont la nullité de la force totale, ainsi que la nullité du moment total pour tout axe Δ

$$\vec{F} = \sum_k \vec{f}_k = \vec{0} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\Delta} = \sum_k \mathcal{M}_{k,\Delta}.$$

1.1 Statique des fluides

Cf. TD d'hydrodynamique

2 Cinématique

2.1 Repère et bases de projection

2.1.1 Définitions

- On appelle solide tout système matériel \mathcal{S} si la distance entre deux points quelconques est constante au cours du temps

$$\forall N, P \in \mathcal{S}, \|\overrightarrow{NP}\| = C^{te}.$$

- Un système de coordonnées est dit lié à un solide lorsque l'origine et les axes de ce système sont fixes par rapport à ce dernier.

2.1.2 Systèmes usuels de coordonnées

Coordonnées cartésiennes Dans un système d'axe orthogonaux $Oxyz$, d'origine O , et de vecteurs unitaires $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$, le vecteur position \overrightarrow{OM} est défini par

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z.$$

Coordonnées cylindriques Si le problème considéré présente une symétrie cylindrique d'axe Oz , les coordonnées cylindriques sont appropriées. Soit H le projeté orthogonal de M dans le plan xOy . On pose $OH = r$ et $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH})$. Le vecteur \vec{u}_r tel que $\overrightarrow{OH} = r\vec{u}_r$ est appelé vecteur unitaire radial. Le vecteur dit orthoradial \vec{u}_θ s'obtient par une rotation de $+\pi/2$ de \vec{u}_r autour de l'axe Oz . Dans la base orthonormée locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, dépendante du point M , le vecteur \overrightarrow{OM} s'écrit

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z.$$

Coordonnées sphériques Dans le cas d'une symétrie sphériques (invariance par rotation autour de O), on repère le point M par ses coordonnées sphériques r, θ et φ

$$r = OM, \theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}), \varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH}),$$

H étant le projeté de M sur le plan xOy . Alors que θ varie seulement entre 0 et π , φ varie entre 0 et 2π . La base orthonormée locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ est définie par

- \vec{u}_r est unitaire selon $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$,
- \vec{u}_θ est orthogonal dans le plan zOM ,
- \vec{u}_φ est orthogonal au plan zOM , la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ étant directe.

2.2 Notion de référentiel

2.2.1 Définition

On appelle référentiel \mathcal{R} lié à un solide \mathcal{S} de référence, la donnée d'un point solide de \mathcal{S} ainsi que 3 directions définissant un système d'axes solide du solide, ainsi que d'une horloge.

Un référentiel est un système physique servant de "référence" pour la description du mouvement d'un point matériel. Par exemple, on peut étudier le mouvement d'une balle par rapport à la Terre, qui est alors considérée comme un objet immobile. En ce sens, la Terre est une référence, et on parle de référentiel terrestre.

2.2.2 Principe d'inertie

Principe d'inertie (Newton, 1686) :

On postule l'existence d'un ensemble de référentiels \mathcal{R}_g , dit galiléens ou d'inertie, en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, dans lesquels une particule matérielle mécaniquement isolée (c'est-à-dire soumise à aucune force) est en translation rectiligne uniforme. Une particule au repos reste au repos.

Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport à \mathcal{R}_i .

2.2.3 Exemples de référentiels

Référentiel de Copernic Il a pour origine le centre de masse du système solaire (attention, ce n'est pas exactement le centre de masse du Soleil), et ses axes sont définis par la direction de 3 étoiles. Il forme la meilleure approximation de référentiel galiléen.

Référentiel héliocentrique Il a pour origine le centre de masse du Soleil, et ses axes sont définis par la direction de 3 étoiles "fixes".

Référentiel géocentrique Il a pour origine le centre de masse de la Terre, et ses axes sont définis par la direction de 3 étoiles "fixes". Il forme une bonne approximation de référentiel galiléen pour des expériences "courtes" devant la rotation de la Terre autour du Soleil.

Référentiel terrestre Il a pour origine un point quelconque de la Terre, et ses axes sont définis localement, liés à la rotation de la Terre. Il forme une bonne approximation de référentiel galiléen pour des expériences "courtes" devant la rotation de la Terre sur elle-même.

2.2.4 Centre de masse et référentiel barycentrique \mathcal{R}^*

Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est le référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , où le centre de masse du système est immobile.

Le vecteur instantané de rotation du référentiel barycentrique par rapport à un référentiel galiléen est donc toujours nul

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}_g) = \vec{0}.$$

2.3 Éléments de cinématique

Il convient de préciser par rapport à quel référentiel on effectue une dérivée.

2.3.1 Expression des vitesses et des accélérations

Coordonnées cartésiennes

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{v}_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z,$$

On se place dans la base localement associée au point M $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, et on a

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{v}_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

ces expressions étant obtenues en utilisant les relations suivantes (**uniquement en cylindrique**)

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r.$$

Coordonnées sphériques On définit une base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ telle que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. L'expression de la vitesse et de l'accélération en sphérique sont très compliquées dans le cas général. On se contentera de les calculer à chaque fois, les coordonnées sphériques permettant de simplifier le problème en utilisant les symétries.

★ **Repère de Frenet** ★ Soit M_0 la position du point matériel étudié à l'instant $t = 0$. On définit

$$s(t) = \widehat{M_0M}$$

l'abscisse curviligne et la base locale $(\vec{u}_t, \vec{u}_n, \vec{u}_B)$ où \vec{u}_t est le vecteur tangent à la trajectoire, \vec{u}_n le vecteur directeur du centre de courbure et \vec{u}_B complétant la base directe. Avec $R \geq 0$ le rayon de courbure, on peut montrer que

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{s} = v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \frac{v^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'accélération normale est toujours dirigée vers le centre de courbure.

2.3.2 ★ Champ de vitesse d'un solide ★

Définition Un solide est un ensemble de points dont les distances restent constantes : c'est un système indéformable.

On se place dans un référentiel \mathcal{R} donné. Soit \mathcal{S} un solide, P et Q deux points appartenant à \mathcal{S} . On peut montrer que, dans le référentiel \mathcal{R} , il existe un vecteur particulier, $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$, vecteur rotation instantanée de \mathcal{S} dans \mathcal{R} . On peut montrer que

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{PQ}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{PQ}.}$$

On peut en déduire immédiatement, en introduisant un point fixe de \mathcal{R} dans la relation précédente, la relation suivante sur le champ de vitesse du solide en P et Q

$$\boxed{\vec{v}_{\mathcal{R}}(Q) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(P) + \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{PQ}.}$$

Comment déterminer $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$?

— *Mouvement de translation* : alors $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{0}$.

- *Rotation d'un solide autour d'un axe fixe dans \mathcal{R} .* Tout les points de l'axe restent fixent sur cet axe. Soit H la projection orthogonale de P sur Oz . P décrit un cercle. Le mouvement du solide est donc déterminer par la donnée de $\theta(t)$. Dès lors que le sens positif de θ est lié par l'orientation du trièdre direct, on aurait

$$\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{u}_z.$$

Valable uniquement si l'axe de rotation est fixe.

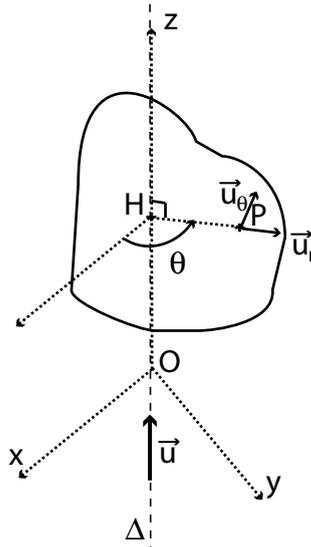


FIGURE 2.1 – Rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

On peut montrer que le mouvement le plus général d'un solide peut être considéré comme la superposition d'un mouvement de rotation et d'un mouvement de translation. L'axe de rotation, dépendant du temps, est appelé axe instantané de rotation.

2.3.3 Notion de point coïncident

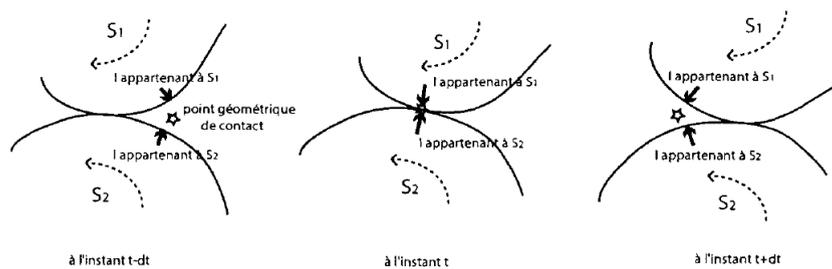


FIGURE 2.2 – Notion de point coïncident.

La figure (2.2) représente aux instants $t - dt$, t et $t + dt$, deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , tous deux en mouvement dans un référentiel \mathcal{R} et restant en contact l'un sur l'autre. On assimile la région de contact à un point de l'espace $I = I(t)$ (point dit **géométrique**) et on suppose les surfaces assez régulières pour qu'existent en I un plan tangent commun et une normale commune à \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 . À l'instant t , on constate qu'il y a trois points au même endroit :

- le point géométrique du référentiel \mathcal{R} où a lieu le contact,

- le point $I \in \mathcal{S}_1$ qui est le point du solide \mathcal{S}_1 qui coïncide avec I à l'instant t ,
- le point $I \in \mathcal{S}_2$ qui est le point du solide \mathcal{S}_2 qui coïncide avec I à l'instant t .

Ces trois points sont représentés par des flèches et une étoile sur le schéma ci-dessus : ils ne coïncident qu'à l'instant t .

2.3.4 ✿ Composition des vitesses pour deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre ✿

Loi de composition des vitesses On considère deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' . Soit M le point matériel considéré. On note M_c le point coïncident avec M mais fixe dans le référentiel \mathcal{R}' . On note \vec{v} la vitesse de M dans \mathcal{R} , \vec{v}' la vitesse de M dans \mathcal{R}' et \vec{v}_e la vitesse du point coïncident M_c dans \mathcal{R} , alors on obtient

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e}.$$

\vec{v}_e est appelée vitesse d'entraînement.

Loi de composition des accélérations Selon le programme de BCPST, "La loi de composition des accélérations est strictement hors programme mais on pourra montrer que l'accélération est la même dans deux référentiels qui sont en translation rectiligne et uniforme, l'un par rapport à l'autre."

2.3.5 ★ Lois de composition des vitesses et accélérations (cas général) ★

Composition des vitesses On considère deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' . Soit M le point matériel considéré. On note M_c le point coïncident avec M mais fixe dans le référentiel \mathcal{R}' . On note \vec{v} la vitesse de M dans \mathcal{R} , \vec{v}' la vitesse de M dans \mathcal{R}' et \vec{v}_e la vitesse du point coïncident M_c dans \mathcal{R} , alors on obtient

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e}.$$

\vec{v}_e est appelée vitesse d'entraînement. De même, on note

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}_e,$$

et $\vec{\Omega}_e$ est appelé vecteur rotation instantané d'entraînement. Soit O' un point fixe dans \mathcal{R}' , on a alors

$$\boxed{\vec{v}_e = \vec{v}(O') + \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M}}.$$

Composition des accélérations On a de même

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$$

où \vec{a} est l'accélération dans \mathcal{R} , \vec{a}' est l'accélération dans \mathcal{R}' , \vec{a}_e est l'accélération dans \mathcal{R} du point coïncident (accélération d'entraînement). Un troisième terme apparaît, \vec{a}_c , appelé accélération de Coriolis, et définit selon

$$\boxed{\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}'}$$

On prendra garde à bien retenir que l'accélération de Coriolis fait intervenir le vecteur rotation instantané d'entraînement et la vitesse dans \mathcal{R}' .

Cas des solides Pour caractériser le mouvement d'un solide, il suffit de se donner la vitesse d'un point et le vecteur rotation instantané de ce solide (torseur cinématique). On peut montrer aisément la relation suivante

$$\boxed{\vec{\Omega} = \vec{\Omega}' + \vec{\Omega}_e}$$

2.4 Lois de frottements

2.4.1 Lois de Coulomb pour le frottement solide

Les lois ci-dessus, également dites lois du frottement solide, par opposition aux lois du frottement fluide, décrivent la résistance à l'avancement d'un solide.

Loi du frottement en présence de glissement

Si les deux solides glissent, la force de frottement possède les propriétés suivantes

- \vec{R}_T est colinéaire à la vitesse de glissement (i.e. à la direction du glissement),
- \vec{R}_T est opposé au glissement,
- $\|\vec{R}_T\| = f_d \|\vec{R}_N\|$,

où f_d est appelé coefficient de frottement dynamique.

Ce qui peut se reformuler par : la force de frottement \vec{R}_T est opposé au glissement et de norme égale à celle de l'action de contact normale \vec{R}_N multipliée par une constante f caractéristique de la nature des surfaces de contact.

De façon intuitive, cette loi exprime le fait que la force de frottement tend à s'opposer au glissement et ce, d'autant plus que l'appui des deux surfaces (mesuré par la norme de \vec{R}_N) est intense.

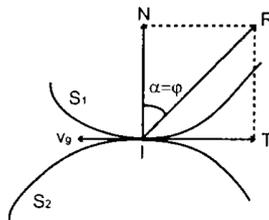


FIGURE 2.3 – Frottement de glissement

Le coefficient de frottement dynamique est caractéristique des matériaux en contact ainsi que de la rugosité des surfaces.

Ordres de grandeur :

- contact bois-bois, $f \sim 0.4$,
- contact acier-garniture de frein, $f \sim 0.35$,
- contact métal-métal, $f \sim 0.2$.

En posant $\alpha = (\vec{R}_N, \vec{R}_T)$ et en introduisant l'angle de frottement (ou angle de glissement) φ défini par

$$f = \tan \varphi,$$

la loi de Coulomb du frottement cinétique a pour conséquence $\alpha = \varphi$, soit encore, en appelant cône de frottement le cône d'axe porté par la normale à la surface et de demi-angle au sommet φ : **en présence de glissement, l'action de contact \vec{R} est située sur le côté de frottement.**

Loi du frottement "statique" (en l'absence de glissement)

S'il n'y a pas de glissement, les normes de la force de frottement et de l'action de contact satisfont

$$\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\|,$$

où f_s est appelé coefficient de frottement statique.

Cette propriété peut aussi se traduire par $\alpha \leq \varphi$, en l'absence de glissement, l'action de contact \vec{R} est intérieure au cône de frottement.

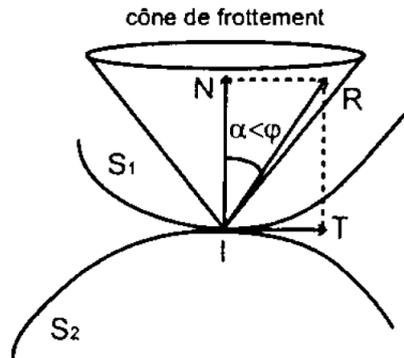


FIGURE 2.4 – Frottement statique

En pratique, on a souvent $f_s \geq f_d$.

2.4.2 Cas des frottements fluides

Lorsqu'un solide est soumis à l'écoulement d'un fluide, on peut écrire la résultante de la force de frottement sous la forme

$$\vec{f}_{\text{frott}} = -\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 C_x S \frac{\vec{v}}{v},$$

où ρ est la masse volumique du fluide, \vec{v} la vitesse relative de l'objet par rapport au fluide, S la surface apparente de l'objet et C_x , appelé coefficient de trainée, un coefficient sans dimension **dépendant a priori** de \vec{v} , du fluide et de la géométrie. Le cas le plus courant correspond au frottement dit "visqueux", pour un écoulement laminaire, où l'on peut montrer que

$$\vec{f}_{\text{visqueux}} = -\alpha\vec{v},$$

où α est une constante dépendant de la géométrie et du fluide. Le cas d'une sphère de rayon R dans un écoulement uniforme à la vitesse \vec{v} est calculable analytiquement, et on a

$$\vec{f}_{\text{visqueux}} = -6\pi\eta R\vec{v},$$

où η est la viscosité dynamique du fluide. Ceci constitue la formule de Stokes.

2.5 ★ Complément : actions de contact ★

2.5.1 Glissement, roulement et pivotement (Hors-Programme)

Le mouvement relatif d'un solide \mathcal{S}_1 par rapport à un solide \mathcal{S}_2 est défini par la donnée du vecteur instantané de rotation de \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 et de la vitesse d'un point du solide (ici le point I de contact).

Le glissement est associé à la vitesse de glissement $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$: il y a glissement si cette vitesse est non nulle.

Le vecteur instantané de rotation se décompose suivant la normale à la surface de contact en I et sur le plan tangent selon

$$\vec{\Omega}(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{\Omega}_N + \vec{\Omega}_T.$$

$\vec{\Omega}_N$ correspond au mouvement de pivotement et $\vec{\Omega}_T$ correspond au mouvement de roulement.

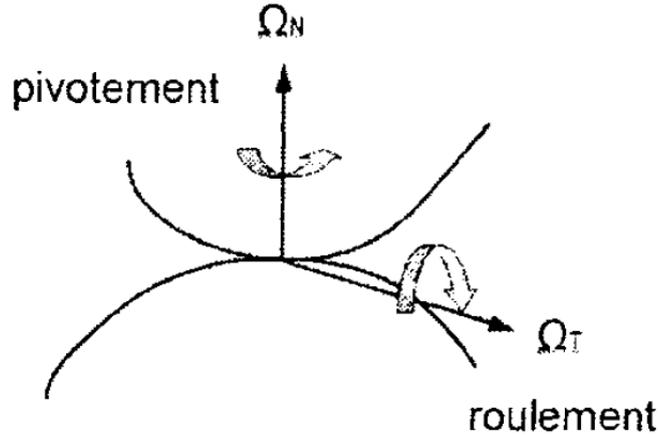


FIGURE 2.5 – Roulement et pivotement de deux solides en contact.

2.5.2 Action de contact entre solides

Au niveau du contact entre deux solides, il peut exister un moment de force s'opposant au pivotement par sa composante normale et au roulement par sa composante tangentielle. L'étude des phénomènes correspondants, appelés respectivement frottement de pivotement et frottement de roulement sort du cadre du programme. Nous nous restreindrons donc ici à déterminer la résultante \vec{R} appelée action de contact ou réaction de \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 . En décomposant suivant la normale et le plan tangent, on écrit

$$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T.$$

On appelle \vec{R}_N composante normale de l'action de contact, action de contact normale ou réaction normale. De même, \vec{R}_T est appelée composante tangentielle de l'action de contact ou, pour des raisons qui vont apparaître, "force de frottement" ou "force de résistance au glissement".

2.6 ★ Complément : notion de vitesse de glissement ★

On définit la vitesse de glissement du solide \mathcal{S}_1 par rapport à \mathcal{S}_2 à l'instant t dans le référentiel \mathcal{R} selon

$$\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in \mathcal{S}_2/\mathcal{R}).$$

On peut vérifier que

$$\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{v}(I \in \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2),$$

où \mathcal{S}_2 est le référentiel lié au solide \mathcal{S}_2 .

Pour calculer la vitesse du point I du solide \mathcal{S}_1 , il suffit de considérer un point quelconque (noté O_1) du solide \mathcal{S}_1 et de lui appliquer la formule classique du champ de vitesse d'un solide

$$\vec{v}(I \in \mathcal{S}_1/\mathcal{R}) = \vec{v}(O_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{S}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1I}.$$

Noter que le point O_1 est un point lié au solide \mathcal{S}_1 défini une bonne fois pour toutes alors que le point I change à chaque instant.

3 Éléments de dynamique

3.1 Éléments de dynamique

3.1.1 Principe des actions réciproques

Énoncé On considère deux points matériels M_1 et M_2 , dont les forces d'interactions sont respectivement notées \vec{f}_{12} (force exercée par 2 sur 1) et \vec{f}_{21} .

Le principe des actions réciproques stipule que l'on a

$$\boxed{\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}},$$

et que les forces \vec{f}_{12} et \vec{f}_{21} sont portées par la droite passant par M_1M_2 .

3.1.2 Théorème de la résultante dynamique

Aussi appelé loi de Newton, ou principe fondamental de la dynamique (PFD).

Énoncé

Pour un système fermé dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{p}_{\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}},$$

*où \vec{F}_{ext} est l'ensemble des forces **extérieures** et $\vec{p}_{\mathcal{R}_g} = m\vec{v}_{\mathcal{R}_g}$ est la quantité de mouvement dans \mathcal{R}_g . Les forces intérieures n'intervenant pas, la définition du système devient fondamentale.*

3.1.3 ★ PFD dans un référentiel non galiléen ★

On considère le mouvement d'un point matériel dans un référentiel \mathcal{R} non galiléen. Le PFD n'est applicable que dans un référentiel galiléen. On se place dans un référentiel galiléen et appliquons le PFD

$$\vec{f} = \left(\frac{d\vec{p}_{\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = m\vec{a}_{\mathcal{R}_g}.$$

Or, d'après les relations de composition des accélérations,

$$\vec{f} = m\vec{a}_{\mathcal{R}_g}(M) = m(\vec{a}_{\mathcal{R}} + \vec{a}_e + \vec{a}_c),$$

d'où

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{f} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c.$$

Ainsi, le PFD dans un référentiel \mathcal{R} quelconque s'écrit

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{p}_{\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}},$$

avec

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e, \quad \vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c.$$

Même si ce ne sont pas des forces, et traduisent le caractère non galiléen, on appelle ces deux quantités forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

3.1.4 ★ Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe ★

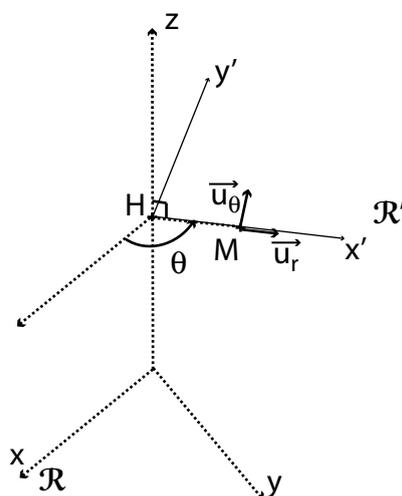


FIGURE 3.1 – Référentiel en rotation autour d'un axe fixe.

Soit un référentiel \mathcal{R} . On considère \mathcal{R}' en rotation uniforme autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire Ω . Soit M un point n'appartenant pas à Δ . Soit H la projection orthogonale de M sur Δ . On peut alors montrer que l'accélération d'entraînement dans \mathcal{R} vaut

$$\boxed{\vec{a}_e = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}}$$

et on en déduit l'expression de la force d'inertie d'entraînement

$$\boxed{\vec{f}_{ie} = m\Omega^2 \overrightarrow{HM}}$$

DÉMONSTRATION :

On considère la géométrie de la figure (3.1). On se place en coordonnées cylindrique, de vecteur de base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Soit M le point matériel considéré en mouvement dans \mathcal{R}' . On note M_c le point coïncident à l'instant t et donc immobile dans \mathcal{R}' . On note H la projection orthogonale de M sur l'axe de rotation de \mathcal{R}' (supposé fixe). Soit \vec{v}_e la vitesse d'entraînement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

$$\vec{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{HM}_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}}.$$

On se place en cylindrique

$$\left(\frac{d\overrightarrow{HM}_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} (r\vec{u}_r)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\dot{r}\vec{u}_r}_{=0 \text{ } M_c \text{ fixe dans } \mathcal{R}'} + r \left(\frac{d\vec{u}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta,$$

soit, pour $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire instantanée,

$$\boxed{\vec{v}_e = r\omega\vec{u}_\theta}.$$

On en déduit l'accélération d'entraînement, en tenant compte que $\dot{r} = 0$ pour le point coïncident,

$$\vec{a}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = r\dot{\omega}\vec{u}_\theta - r\omega^2\vec{u}_r,$$

et donc dans le cas d'un axe fixe,

$$\boxed{\vec{a}_e = r\dot{\omega}\vec{u}_\theta - r\omega^2\vec{u}_r}.$$

Dans le cas particulier d'une rotation uniforme,

$$\boxed{\vec{a}_e = -r\omega^2\vec{u}_r = -\omega^2 \overrightarrow{HM}}$$

3.1.5 ★ Généralisation à un système matériel ★

Par définition, on appelle quantité de mouvement d'un point matériel la quantité $\vec{p} = m\vec{v}$. On généralise cette notion pour un système de points de masse m_i selon

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

Dans le cas d'un système continue, on généralise suivant

$$\vec{P} = \int \vec{v}(M) dm(M).$$

En notant M la masse totale du système, et G sont centre de masse, on peut montrer que

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{V}(G)}$$

Cas du RCM \mathcal{R}^* Le RCM est un référentiel particuliers possédant quelques propriétés à connaître. Le RCM étant en translation par rapport à un référentiel galiléen, il est donc aussi nécessairement en translation par rapport au référentiel d'étude initial \mathcal{R} , et donc on a

$$\boxed{\vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \vec{0}}.$$

Remarque : la définition du RCM est dépendante du référentiel initial (car on n'impose qu'une translation).

Ainsi, comme la vitesse rotation instantanée d'entraînement est nulle, l'accélération de Coriolis l'ai aussi et donc

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}(G)},$$

car la vitesse d'entraînement est celle de G . De même, pour les accélérations

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{a}(G) + \underbrace{\vec{a}_c}_{=\vec{0}}}.$$

De plus il est trivial de montrer que

$$\boxed{\vec{P}^* = \vec{0}},$$

par définition de \mathcal{R}^* .

3.2 Loi de gravitation universelle et théorème de Gauss

Analogies entre l'électrostatique et la gravitation.

Électrostatique

2 particules chargées

$$\vec{f}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{21}$$

Champ électrique

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \vec{u}$$

Gravitation

2 particules massives

$$\vec{f}_{21} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{21}$$

Champ de gravitation

$$\vec{G} = -\mathcal{G} \frac{m_0}{r^2} \vec{u}$$

Par conséquent, on faisant l'analogie formelle

$$\boxed{q \leftrightarrow m} \quad \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -\mathcal{G}},$$

on obtient des résultats équivalents sur la structure des champs.

	<i>circulation conservative</i>	
Électrostatique		Gravitation
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$		$\oint \vec{G} \cdot d\vec{l} = 0$

\vec{E} dérive d'un potentiel électrostatique

\vec{G} dérive d'un potentiel gravitationnel

charge ponctuelle : $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

masse ponctuelle : $V(r) = -\mathcal{G} \frac{m}{r}$

flux non conservatif

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}}/\epsilon_0 \quad \boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}}$$

Exemple d'application la plus courante : calcul du champ de gravitation à l'intérieur de la Terre, cette dernière étant considérée comme homogène.

3.3 Cas des systèmes ouverts : exemple de la fusée

Cf. TD.

4 Aspects énergétiques

4.1 Travail d'une force

4.1.1 Définitions

Soit un point matériel M soumis à une force \vec{F} . Au cours d'un déplacement $d\vec{l}$, la force **fournit** un travail élémentaire δW selon

$$\boxed{\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}},$$

dans un référentiel \mathcal{R} donné.

Au cours d'un déplacement de A vers B , on a un travail W

$$\boxed{W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l}},$$

où \mathcal{C} est le chemin suivi. A priori, le travail dépend du chemin suivi. W a la dimension d'une énergie, et donc son unité USI est le Joule (J).

La puissance \mathcal{P} d'une force \vec{F} , appliquée sur un point matériel M de vitesse \vec{v} , **dans un référentiel \mathcal{R}** est définie par

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}},$$

dans le référentiel \mathcal{R} . La puissance s'exprime en Watts (W) en USI.

Remarque : \mathcal{P} et W sont des grandeurs algébriques, si $\mathcal{P} > 0$, on parle de travail moteur, et si $\mathcal{P} < 0$, on parle de travail résistant.

4.1.2 Lien en \mathcal{P} et W

On a

$$\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt},$$

d'où

$$\boxed{\delta W = \mathcal{P} \delta t}.$$

4.2 Théorème de l'énergie cinétique

4.2.1 Énoncé

*On considère un point M se déplaçant de M_1 à M_2 entre les instants t_1 et t_2 . On a alors la variation d'énergie cinétique donnée selon, **dans un référentiel galiléen,***

$$\boxed{\Delta E_{c21} = E_{c2} - E_{c1} = W_{1 \rightarrow 2}}.$$

4.2.2 Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen, on a le PFD $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$, et donc

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right),$$

soit, par rapport à \mathcal{R}_g ,

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{dE_c}{dt}}.$$

4.2.3 Généralisation à un solide

Soit (Σ) un système matériel en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} et soumis à un champ de forces réparties $\{d\vec{f}(M)\}$. On appelle puissance de ce champ de forces la somme des puissances des forces élémentaires exercées en chacun des points de (Σ) soit

$$\mathcal{P} = \iiint_{\Sigma} d\vec{f}(M) \cdot \vec{v}(M).$$

\mathcal{P} est additive par construction pour les partitions de Σ ou les champs de force. Elle dépend du référentiel.

On définit de même δW le travail élémentaire entre t et $t + dt$ pour un déplacement élémentaire $d\vec{M}$

$$\delta W = \mathcal{P} dt = \iiint_{\Sigma} d\vec{f}(M) \cdot d\vec{M}.$$

4.2.4 ★ Théorème de l'énergie cinétique pour un solide ★

Soit (Σ) un système **fermé**, dans un référentiel **galiléen** \mathcal{R}

$$E_c = \iiint_{\Sigma} \frac{1}{2} dm v^2(M),$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \iiint_{\Sigma} \frac{1}{2} dm 2v(M) \cdot \frac{dv(M)}{dt}, \\ &= \iiint_{\Sigma} dm \vec{a}(M) \cdot \vec{v}(M). \end{aligned}$$

Or, $\vec{a}(M) dm = d\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} + d\vec{F}_{\text{int} \rightarrow M}$, d'où

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{\Sigma} d\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} \cdot \vec{v}(M) + \iiint_{\Sigma} d\vec{F}_{\text{int} \rightarrow M} \cdot \vec{v}(M).$$

Soit

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}.$$

En intégrant la relation précédente, on obtient le théorème de l'énergie cinétique

$$E_{c2} - E_{c1} = W_{\text{ext } 1 \rightarrow 2} + \mathcal{W}_{\text{int } 1 \rightarrow 2}.$$

On obtiendrait le même résultat pour un système de particules. **On retiendra qu'il faut tenir compte du travail des forces intérieures.**

4.3 Énergie potentielle

4.3.1 Définition

Lorsqu'une force \vec{f} , appliquée sur un point matériel, ne dépend que de M , on dit que le point se trouve sur un champ de forces, indépendant du temps $\vec{f} = \vec{f}(M)$. Soit un point matériel M soumis à l'action d'un champ de force $\vec{f}(M)$ et se déplaçant de $d\vec{l} = d\vec{OM}$ entre t et $t + dt$ dans un référentiel **galiléen** d'origine O .

Si le travail élémentaire $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{l}$ peut se mettre sous la forme $\delta W = -dE_p$, on dit que la force $\vec{f}(M)$ dérive de la fonction énergie potentielle E_p . L'expression de E_p est obtenue, à une constante près, par l'intégration de la relation locale

$$dE_p = -\delta W = -\vec{f} \cdot d\vec{l}.$$

Remarque : l'énergie potentielle est définie à une constante près.

4.3.2 ✿ Exemples ✿

Énergie potentielle de pesanteur

Pour une particule de masse m , soumise à un champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{u}_z$, on a

$$E_p = mgz + E_0,$$

où E_0 est une constante.

Énergie potentielle élastique

Une particule est soumise à une force de rappel élastique de la forme

$$\vec{f} = -k(l - l_0)\vec{u}_x.$$

À cette force, on peut associer une énergie potentiel élastique

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + E_0.$$

Énergie potentielle d'un champ newtonien de forces

On considère une interaction dite newtonienne dont l'intensité varie en $1/r^2$, i.e. de la forme

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r,$$

où le coefficient $k > 0$ pour une interaction attractive, et $k < 0$ pour une interaction répulsive. Par exemple, $k = \mathcal{G}m_1m_2$ pour une interaction gravitationnelle, alors que $k = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$ dans le cas de la force électrostatique de Coulomb. Alors l'énergie potentielle associée a pour expression

$$E_p = -\frac{k}{r} + E_0.$$

★ Un cas très fréquent ★

On considère un référentiel \mathcal{R} tournant à Ω constant par rapport à \mathcal{R}_g galiléen. Dans le référentiel tournant, il faut tenir compte de la force d'inertie du point M de projection orthogonal H sur l'axe de rotation

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\Omega^2\overrightarrow{HM}.$$

En se plaçant en cylindrique

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{u}_r + z\vec{u}_z, \\ d\overrightarrow{OM} &= dr\vec{u}_r + r d\vec{u}_r + dz\vec{u}_z.\end{aligned}$$

Or, $d\vec{u}_r$ est orthogonal à \vec{u}_r . On calcul alors le travail élémentaire

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{OM}, \\ &= m\Omega^2 r \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + rd\vec{u}_r + dz\vec{u}_z), \\ &= m\Omega^2 r dr, \\ &= -d\left(-\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2\right).\end{aligned}$$

On peut donc, **dans ce cas**, associer une énergie potentielle aux forces d'inertie d'entraînement selon

$$E_{p_{\text{inertie}}} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2.$$

4.4 Énergie mécanique

Soit un point matériel M , de masse m , décrivant une trajectoire \mathcal{C} dans \mathcal{R}_g sous l'action de différentes forces

$$\begin{cases} \text{des forces conservatives, telles que } dE_p = -\delta W_p, \\ \text{des forces non conservatives, ne dérivant pas d'une énergie potentielle.} \end{cases}$$

Pour un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ du point matériel M dans \mathcal{R}_g , le théorème de l'énergie cinétique conduit à

$$dE_c = \delta W = \underbrace{\delta W_p}_{-dE_p} + \delta W_d,$$

soit

$$d(E_c + E_p) = \delta W_d.$$

On définit l'énergie mécanique E_m selon

$$E_m = E_c + E_p.$$

Si les forces agissant sur la particule dérivent d'une énergie potentielle, alors E_m est **conservée**.

4.4.1 Intégrale 1^{re} du mouvement

La conservation de E_m donne une équation supplémentaire pour l'étude du mouvement, mais elle n'apporte pas d'informations supplémentaires par rapport aux théorèmes généraux. Elle fait intervenir des dérivées premières par rapport au temps des positions, contrairement aux théorèmes généraux (TMC, TRD) faisant intervenir des dérivées secondes. En quelque sorte, la conservation de l'énergie mécanique est obtenue en "intégrant" une fois les équations du mouvement, la constante d'intégration étant la valeur de l'énergie, obtenue via les conditions initiales. C'est pour cela que l'on parle d'intégrale première du mouvement.

4.4.2 Conditions de stabilité d'une position d'équilibre

La donnée de $E_p(\{x_i\})$ en fonction des coordonnées $\{x_i\}$ permet de prédire des résultats sur la nature de la trajectoire en fonction de E_m , c'est-à-dire les conditions initiales. En effet, on a $E_c > 0$, donc en vertu de $E_m = \text{Cte} = E_p + E_c < E_p$, donc les trajectoires sont contraintes à vérifier

$$E_p(\{x_i\}) < E_m.$$

4.5 Voisinage de l'équilibre ; systèmes conservatifs unidimensionnels

4.5.1 Conditions de stabilité d'une position d'équilibre

La donnée de $E_p(\{x_i\})$ en fonction des coordonnées $\{x_i\}$ permet de prédire des résultats sur la nature de la trajectoire en fonction de E_m , c'est-à-dire les conditions initiales. En effet, on a $E_c > 0$, donc en vertu de $E_m = \text{Cte} = E_p + E_c < E_p$, donc les trajectoires sont contraintes à vérifier

$$\boxed{E_p(\{x_i\}) < E_m}.$$

Cas d'un seul degré de liberté

On considère un système 1D d'énergie potentiel $E_p(x)$. Une position $x = x_0$ est une position d'équilibre si elle vérifie la condition

$$\boxed{\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_0} = 0}.$$

Ces positions d'équilibre sont stables si elles vérifient de plus

$$\boxed{\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0}.$$

Cas de plusieurs degrés de liberté

On considère un système 1D d'énergie potentiel $E_p(\{x_i\})$. Une position $\{x_i\} = \{x_i^0\}$ est une position d'équilibre si elle vérifie la condition

$$\boxed{\forall i, \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_i}\right)_{\{x_i\}=\{x_i^0\}} = 0}.$$

Ces positions d'équilibre sont stables si elles vérifient de plus

$$\boxed{\forall i, \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_i^2}\right)_{\{x_i\}=\{x_i^0\}} > 0}.$$

4.5.2 Cas des petites oscillations autour de l'équilibre

On considère un potentiel $E_p(x)$ unidimensionnel, dont x_0 est une position d'équilibre stable, *i.e.*

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_0} = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0.$$

Pour les petits mouvements autour de x_0 , on peut faire un développement limité du potentiel

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

En posant $m\omega_0^2 = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0$, on obtient donc

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x - x_0)^2,$$

c'est l'énergie potentielle élastique d'un oscillateur harmonique (voir l'expression de l'énergie potentielle d'un ressort). D'où l'importance de l'étude des oscillateurs harmoniques.

4.6 Relation entre force et énergie potentiel

4.6.1 Opérateur gradient

Soit $U(\vec{r})$ une fonction scalaire de la position d'un point M de l'espace. Lors d'un déplacement de M de $d\vec{r}$, la fonction $U(\vec{r})$ varie de

$$dU(\vec{r}) = U(\vec{r} + d\vec{r}) - U(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot d\vec{r},$$

où $\overrightarrow{\text{grad}}U$, également noté $\vec{\nabla}U$, est l'opérateur vectoriel gradient appliqué à la fonction scalaire $U(\vec{r})$.

4.6.2 Expression en coordonnées cartésiennes

On montre aisément que

$$\overrightarrow{\text{grad}}U(\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z.$$

4.6.3 Cas simples

Symétrie axiale

Si U est une fonction de la seule variable x , alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}U(x) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x.$$

Symétrie cylindrique

La grandeur U ne dépend que de la distance $r = HM$ du point M à l'axe de révolution Oz du système. On obtient alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}U(r) = \frac{dU}{dr}\vec{u}_r,$$

avec $\vec{u}_r = \overrightarrow{HM}/r$.

Symétrie sphérique

Dans ce cas, en coordonnées sphériques d'origine O , avec $r = OM$, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}U(r) = \frac{dU}{dr}\vec{u}_r,$$

avec $\vec{u}_r = \overrightarrow{OM}/r$.

4.7 Relation entre force et énergie potentielle

On dit que le champ de force $\vec{f}(M)$ dérive de la fonction énergie potentielle $E_p(M)$ à condition que

$$\vec{f}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p(M).$$

4.8 Analogie entre potentiel gravitationnel et potentiel électrostatique

On considère une particule de masse m située en O . Elle exerce sur une particule de masse m' située en M une force gravitationnelle qui dérive d'une énergie potentielle E_p qu'on obtient (à une constante près) selon

$$E_p = -\mathcal{G} \frac{mm'}{r}.$$

On peut alors introduire un potentiel gravitationnel V_g tel que $E_p = m'V_g$

$$V_g = -\mathcal{G} \frac{m}{r}.$$

On a alors $\vec{f} = -m' \overrightarrow{\text{grad}} V_g = m' \vec{g}$, où \vec{g} est le champ de pesanteur local. En électromagnétisme, on a le champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_e$, où V_e est le potentiel électrostatique. Dans le cas d'un champ résultant d'une charge ponctuelle q en O , on a

$$V_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Une charge q' sera soumise à une force $q'\vec{E}$. On a donc une analogie formelle entre électrostatique et gravitation, à condition d'opérer les substitutions suivantes

$$\vec{g} \leftrightarrow \vec{E}, \quad m \leftrightarrow q, \quad V_g \leftrightarrow V_e,$$

$$-4\pi\mathcal{G} \leftrightarrow \frac{1}{\epsilon_0}.$$

En particulier, le théorème de Gauss est également applicable au cas du potentiel gravitationnel.

5 ★ Moment cinétique - dynamique d'un solide indéformable ★

5.1 Définition

5.1.1 Cas d'un point matériel

Soit m un point matériel de masse m , on définit le moment cinétique en O selon

$$\boxed{\vec{L}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}},$$

où $\vec{p} = m\vec{v}$ est l'impulsion.

Il important de garder à l'esprit que le moment cinétique est un champ de vecteur, et qu'on le calcul en un point de l'espace.

Une conséquence est que l'on peut calculer le moment cinétique en O' connaissant \vec{p} et $\vec{L}(O)$ selon

$$\vec{L}(O') = \vec{L}(O) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}.$$

5.1.2 Cas d'un ensemble de points matériels et d'un solide

On généralise cette notion par extensivité, pour le système de points matériels selon

$$\vec{L}(O) = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{v}(m_i),$$

et dans le cas d'un solide

$$\vec{L}(O) = \int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) dm$$

Changement de point O pour le moment cinétique Soit O et O' deux points distincts. On a

$$\begin{aligned} \vec{L}(O') &= \iiint \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{v}(M) dm, \\ &= \underbrace{\iiint \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{v}(M) dm}_{\overrightarrow{O'O} \wedge m\vec{v}(G)} + \underbrace{\iiint \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) dm}_{\vec{L}(O)}, \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\vec{L}(O') = \vec{L}(O) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{P}}.$$

Cas du RCM Dans le RCM, on a $\vec{P}^* = \vec{0}$, et donc par conséquent le moment cinétique est indépendant du point où on le calcul dans \mathcal{R}^*

$$\forall O, \vec{L}^*(O) = \vec{L}^*.$$

De plus, par composition des vitesses, dans le référentiel initial \mathcal{R}

$$\boxed{\vec{L}(G) = \vec{L}^*}.$$

5.1.3 Solide en rotation autour d'un axe Δ

On se place dans un référentiel quelconque \mathcal{R} . Soit O un point de l'axe de rotation. A priori, il n'y a aucune raison pour que $\vec{L}(O)$ soit porté par l'axe Δ . Soit \vec{u} le vecteur directeur de Δ . On a le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}$. Soit L_Δ la projection de $\vec{L}(O)$ sur Δ . On montre que

$$\boxed{L_\Delta = J_\Delta \omega},$$

avec J_Δ le moment d'inertie du solide selon l'axe Δ

$$J_\Delta = \int_{\text{solide}} r_\Delta^2 dm.$$

où r_Δ est la distance à Δ du point courant.

5.2 Théorème du moment cinétique

5.2.1 Énoncé

Pour \mathcal{S} un système fermé dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , on a

$$\left(\frac{d\vec{L}_{\mathcal{R}_g}(O)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O),$$

le point O étant un point fixe dans le référentiel galiléen.

5.2.2 Cas du RCM

Dans le cas particuliers du RCM, on peut montrer que

$$\left(\frac{d\vec{L}^*(G)}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G),$$

et d'après $\vec{L}(G) = \vec{L}^*$, on en déduit que l'on peut appliquer le TMC en G sans faire intervenir les forces d'inertie

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}_{\mathcal{R}_g}(G)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G) \Leftrightarrow \left(\frac{d\vec{L}^*(G)}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G)}.$$

5.2.3 Généralisation à un système matériel

Cas d'un ensemble de points matériels

On considère un système physique noté Σ constitué d'un ensemble de points $\{i\}$ de masse m_i , vitesse \vec{v}_i et de position M_i . On a alors

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}(O)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i(O)},$$

où O est un point fixe dans \mathcal{R}_g , référentiel galiléen, et $\mathcal{M}_i(O)$ moment en O exercé sur la particule i .

5.3 Théorèmes de Koenig

5.3.1 1^{er} théorème de Koenig

Soit P un point quelconque de l'espace, un système matériel de masse totale M et de centre de masse G

$$\boxed{\vec{L}(P) = \vec{L}^*(G) + \overrightarrow{PG} \wedge M\vec{V}(G)}.$$

5.3.2 2^e théorème de Koenig

Soit un système matériel de masse totale M et de centre de masse G . On peut aisément montrer que

$$\boxed{E_c = E_c^* + \frac{1}{2}M\vec{V}(G)^2}.$$

5.4 Théorème généraux de la mécanique des solides

5.4.1 TRD : théorème de la résultante cinétique

Dans un référentiel galiléen,

$$\boxed{m\vec{a}(G) = \vec{F}_{\text{ext}}}.$$

Dans le cas d'un référentiel non galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie.

5.4.2 TMC : théorème du moment cinétique et TMC*

Pour \mathcal{S} un système fermé dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , on a

$$\left(\frac{d\vec{L}_{\mathcal{R}_g}(O)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O),$$

le point O étant un point fixe dans le référentiel galiléen.

Dans le référentiel barycentrique, on a

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G)}.$$

\vec{L}^* étant indépendant du point dans le RCM.

Remarque : le RCM n'est pas galiléen mais

- $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$ car \mathcal{R}^* est en translation par rapport à un référentiel galiléen,
- $\vec{f}_{ie} \neq \vec{0}$ mais $\vec{\mathcal{M}}_{ie}(G) = \vec{0}$ (translation).

5.4.3 Contacts entre les solides

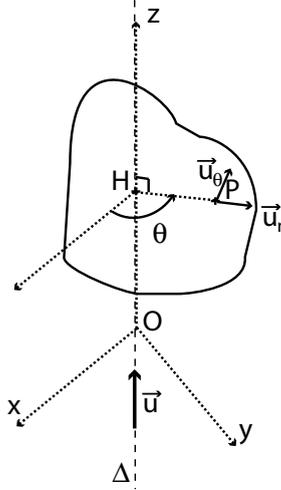
Lorsqu'un solide intervient dans un problème, il convient d'étudier les actions de liaison de ce solide. Deux cas peuvent se présenter :

- **la vitesse de glissement est nulle au point de contact**, alors l'écriture de la condition de non glissement fournit une équation supplémentaire,
- **la vitesse de glissement est non nulle**, alors les lois du frottements donne une relation entre les deux composantes de la réaction \vec{R}_N et \vec{R}_T , et donc une équation supplémentaire.

Dans les deux cas, l'étude du contact donne donc une équation supplémentaire. Exemple d'application : l'effet rétro (Cf. TD).

5.5 Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g

Soit un solide (\mathcal{S}) en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (O; \vec{u})$. Soit $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}$ son vecteur instantané de rotation. On cherche à calculer la composante de $\vec{L}(O)$, $O \in \Delta$, selon Oz. A priori,



il n'y a aucune raison pour que $\vec{L}(O)$ soit dans la même direction que \vec{u} . On a

$$\vec{v}(M) = r\Omega\vec{u}_\theta.$$

On a donc

$$\begin{aligned} d\vec{L}(O) &= dm(M)\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) = dm(M)(r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge (r\Omega\vec{u}_\theta), \\ &= dm(M)r^2\Omega\vec{u}_z - dmrz\Omega\vec{u}_r. \end{aligned}$$

Donc on obtient $L_\Delta(O) = \vec{L}(O) \cdot \vec{u}$

$$L_\Delta(O) = \iiint dm(M)r^2\Omega = \Omega \underbrace{\iiint r^2 dm(M)}_{I_\Delta} = I_\Delta\Omega.$$

On remarque que $L_\Delta(O)$ est indépendant de O , et est noté désormais L_Δ . I_Δ est le moment d'inertie du solide selon l'axe Δ . Conséquence,

$$\boxed{L_\Delta = I_\Delta\Omega}.$$

Du théorème du moment cinétique, on en déduit aisément

$$I_\Delta\ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta,$$

où \mathcal{M}_Δ est la projection de $\vec{\mathcal{M}}(0)$ sur Δ , indépendant de O .

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution - Pas d’utilisation commerciale - Pas de modification 4.0 International”.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>