Transformée de Fourier Rapide

Centre Interuniversitaire de préparation à l'Agrégation de Physique

Montrouge 2015-2016

kenneth.maussang@ens.fr

Transformée de Fourier et FFT

Notion de spectre :

Soit un signal $s(t)$ dépendant du temps. On définit sa transformée de Fourier $\hat{s}(f)$ selon

$$\hat{s}(f) = \mathcal{F}\big(s(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2i\pi f t}\mathrm{d}t,$$

et sa transformée inverse

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(\hat{s}(f)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(f)e^{2i\pi f t}\mathrm{d}f.$$

Rq1 : Dans le cas d'un circuit linéaire, le principe de superposition permet de caractériser complètement sa réponse en étudiant la réponse harmonique. D'où l'importance de l'étude de la fonction de transfert dans l'espace réciproque.

Rq2 : Transformée de Fourier et produit de convolution

$$[s * h](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(u-t) \cdot h(u)\mathrm{d}u,$$

$$\mathcal{F}([s * h]) = \mathcal{F}(s) \cdot \mathcal{F}(h) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(s \cdot h) = [\mathcal{F}(s) * \mathcal{F}(h)]$$

Transformée de Fourier et FFT

__Numérisation et transformée de Fourier discrète :__

Soit un signal $s(t)$, échantillonné par un instrument (oscilloscope, carte d'acquisition,…) avec un taux d'échantillonnage $1/\delta t_e$. Le signal obtenu est alors de la forme

$$S_n = s(t_0 + n\delta t_e), \qquad t_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

On définit la transformée de Fourier discrète selon

$$\tilde{S}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n \cdot e^{-2i\pi k\frac{n}{N}},$$

où N est le nombre de points échantillonnés. Alors que la TF est une décomposition sur la base des fonctions exponentielles complexes de norme 1, la TF discrète est une décomposition sur la base des racines *n*ièmes de l'unité…

La transformée de Fourier inverse est définie selon

$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{S}(k) \cdot e^{2i\pi k\frac{n}{N}}.$$

Soit la fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/\delta t_e$.

On peut montrer que :

- la **résolution en fréquence est de $\boldsymbol{\delta f = F_e/N}$** ;
- la **fréquence maximale du spectre accessible est $\boldsymbol{F_e/2}$** (critère de Shannon).

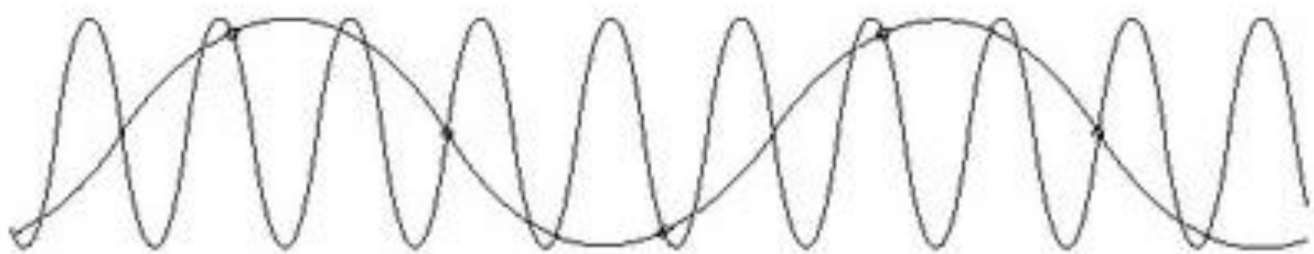
Transformée de Fourier et FFT

Illustration du critère de Shannon :

Adequately sampled signal

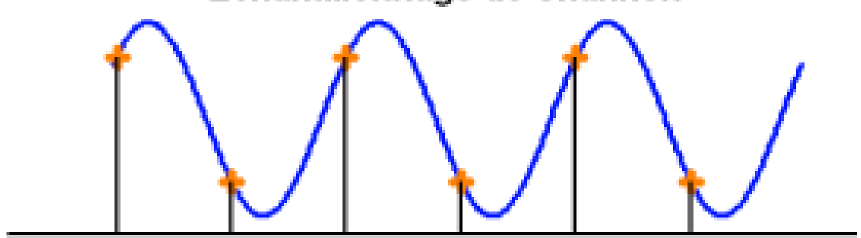
ALIASING

(repliement de spectre)



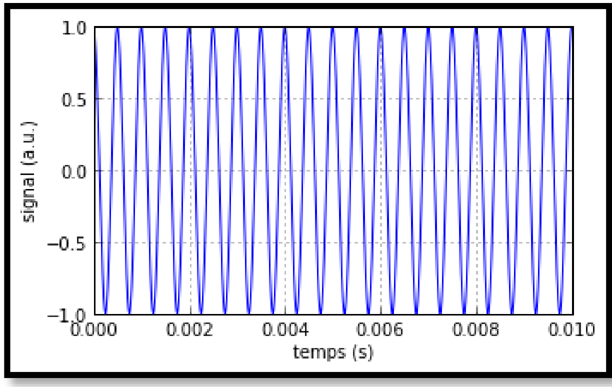
Aliased signal due to undersampling

Echantillonnage de Shannon

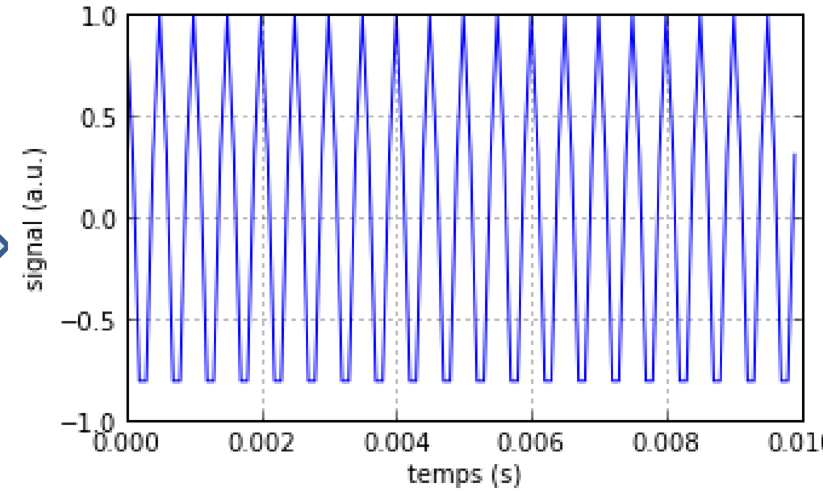


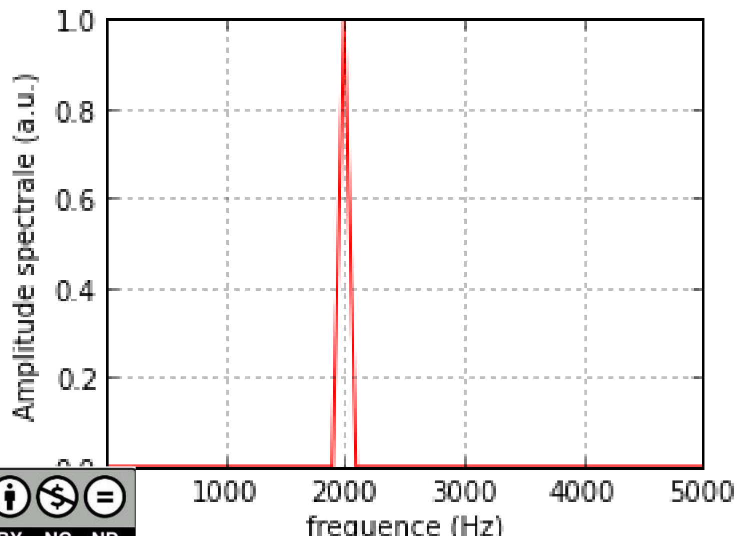
Transformée de Fourier et FFT

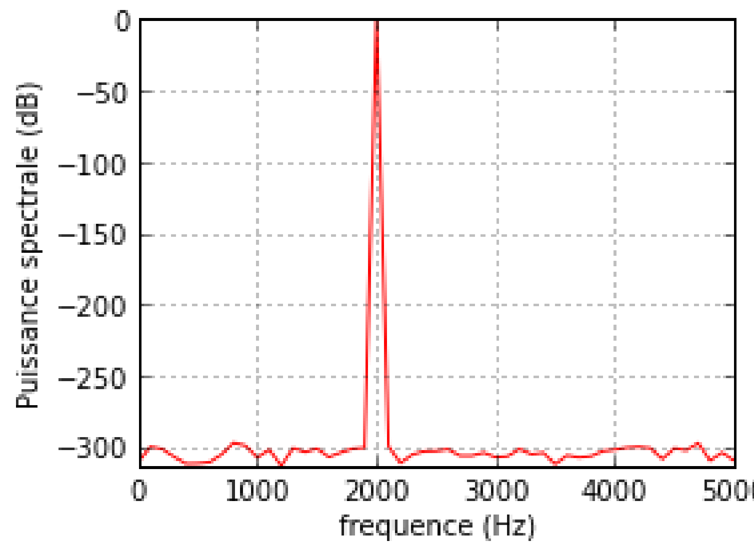
Exemple : signal de f=2kHz, échantillonnage de f_e=10kHz pendant T=10ms.



échantillonnage

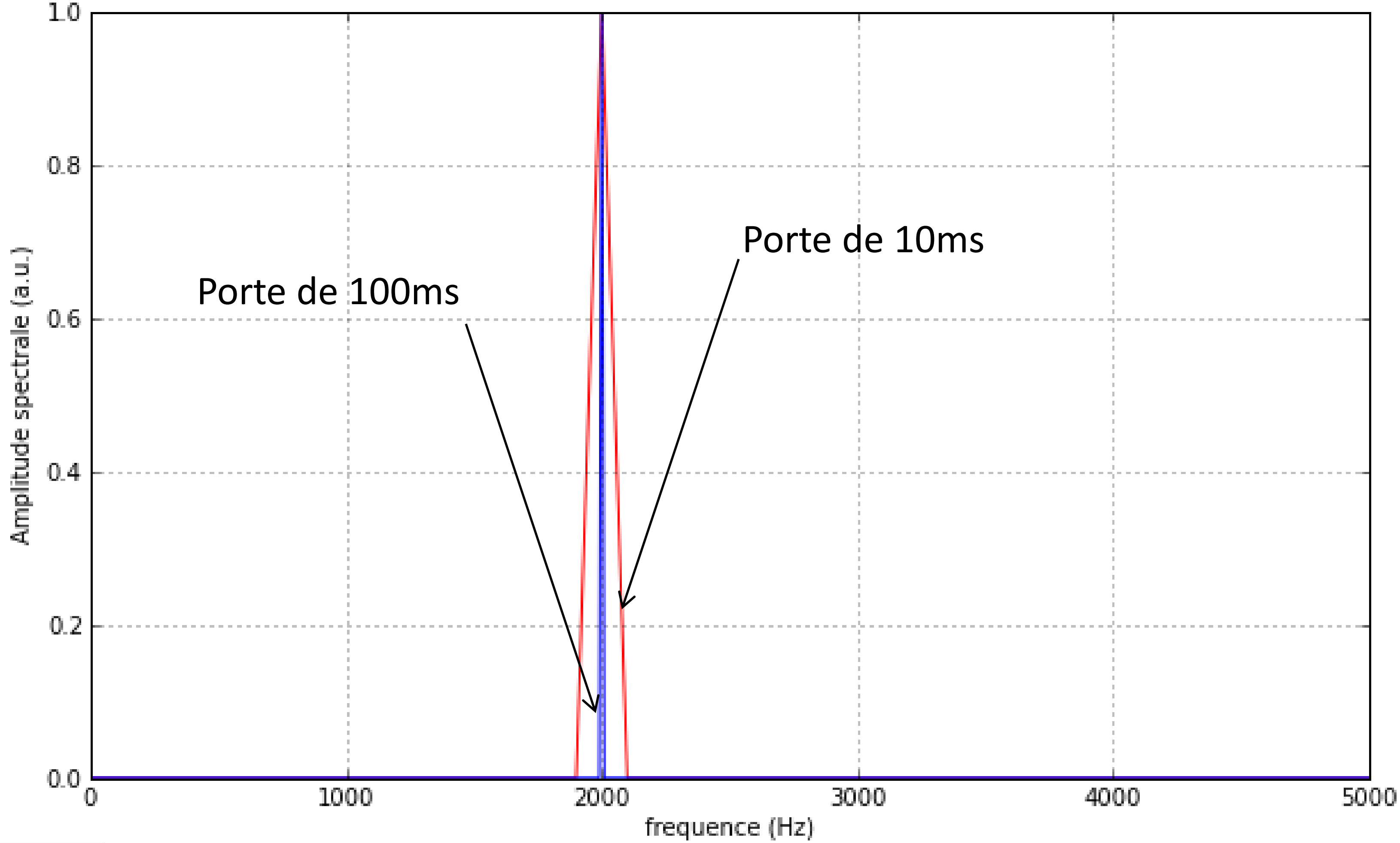






Transformée de Fourier et FFT

Influence de la durée d'acquisition : **acquisition de T=100ms et T=10ms**
signal à f=2kHz, échantillonnage à f_e=10kHz



Transformée de Fourier et FFT

Cas de la FFT sur un oscilloscope.

Le nombre de points échantillonné est fixé par le constructeur. Le taux d'échantillonnage f_e va donc être fixé par la base de temps utilisé et donc la durée d'acquisition et la fréquence d'échantillonnage sont liées selon

$$f_e = \frac{N}{T} = \frac{N}{(x \text{ secondes/divisions}) \times (\text{Nombre de divisions sur l'écran})},$$

le nombre de point étant un paramètre de l'oscilloscope utilisé.

Ainsi, pour augmenter la résolution fréquentielle du spectre, il faut augmenter le temps d'acquisition T, mais en faisant cela, on diminue également la fréquence d'échantillonnage f_e et donc la fréquence maximale satisfaisant le critère de Shannon ($f_e/2$).

<u>En pratique :</u> commencer avec un temps d'acquisition suffisamment court et l'augmenter progressivement jusqu'à une valeur satisfaisante.

TF, FFT et fenêtre de pondération

Considérons un signal dépendant du temps $x(t)$ et sa transformée de Fourier

$$\hat{x}(t) = \mathcal{F}\big(x(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi f t} \mathrm{d}t.$$

En pratique, il est impossible d'acquérir un signal pendant une durée infinie. Il est nécessaire de **tronquer** le signal avant son traitement numérique, afin qu'il soit limité dans le temps.

Mathématiquement, cela revient à effectuer l'opération suivante

$$x_T(t) = x(t) \cdot \Pi_T\ (t),$$

où $x_T(t)$ est le signal à traiter et $\Pi_T(t)$ la fonction porte de durée T (où T est la durée d'acquisition en pratique).

Or, d'après les propriétés de la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}\big(x_T(t)\big) = \mathcal{F}\big(x(t) \cdot \Pi_T(t)\big) = \big[\mathcal{F}\big(x(t)\big) * \mathcal{F}\big(\Pi_T(t)\big)\big],$$

ainsi, la transformée de Fourier du signal tronquée correspond à la convolution entre la transformée de Fourier du signal complet et la transformée de Fourier de la fonction de troncature.

Dans le cas d'un signal harmonique, la TF d'une fonction porte est un sinus cardinal : il y a à la fois un élargissement du pic et l'apparition de lobes secondaires.

<u>**Deux conséquences :**</u>

une résolution fréquentielle dépendant du temps de mesure T finie ;

apparition de lobes secondaires qui peuvent masquer d'autres fréquences.

TF, FFT et fenêtre de pondération

Pour atténuer les effets de l'opération de troncature, on introduit des fenêtres de pondération $\rho_T(t)$. Cela signifie qu'au lieu de traiter le signal tronqué $x_T(t)$, on traite le signal pondéré par

$$x_p(t) = \rho_T(t) \cdot x_T(t).$$

Idéalement, il faudrait obtenir un lobe principal aussi étroit que possible et des lobes secondaires d'amplitudes très faibles.
Cependant, il n'est pas possible d'avoir simultanément ces deux propriétés…
Les fenêtres sont donc à choisir en fonction du signal analysé et du compromis désiré.

Par ailleurs, une fenêtre diminuant partiellement le signal par rapport à une fenêtre porte, le choix de fenêtrage sera également guidé en fonction du rapport signal à bruit (une fenêtre atténuant trop le signal ne permettra pas forcément de résoudre des pics de faible amplitude).

Remarque : l'analyse de Fourier est un processus complexe, intervenant fréquemment dans le contexte de l'analyse et la spectroscopie (ex. : spectroscopie IR par TF).
Ce cours n'a aucunement la prétention d'être complet sur le sujet…

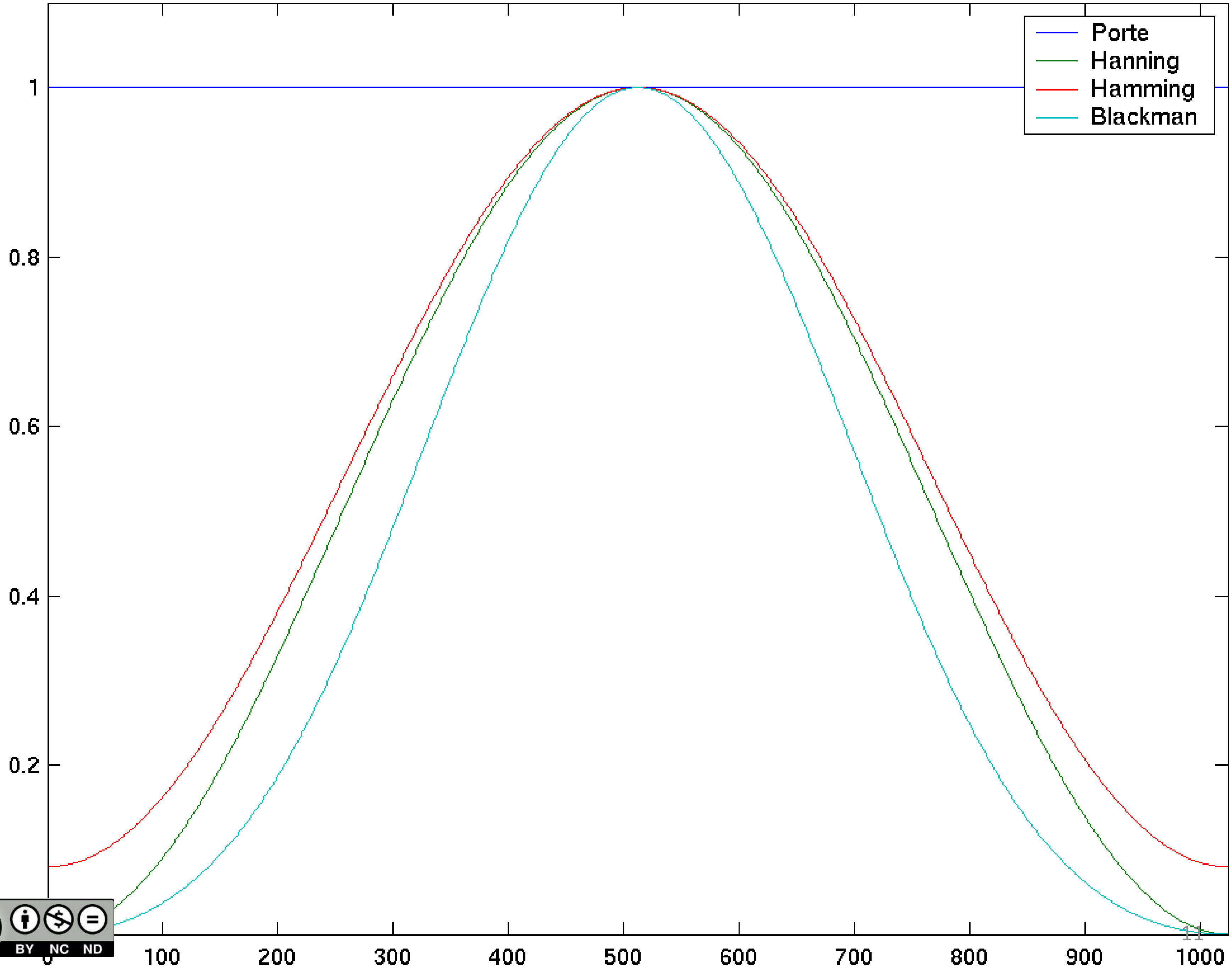
Quelques fenêtres de pondération

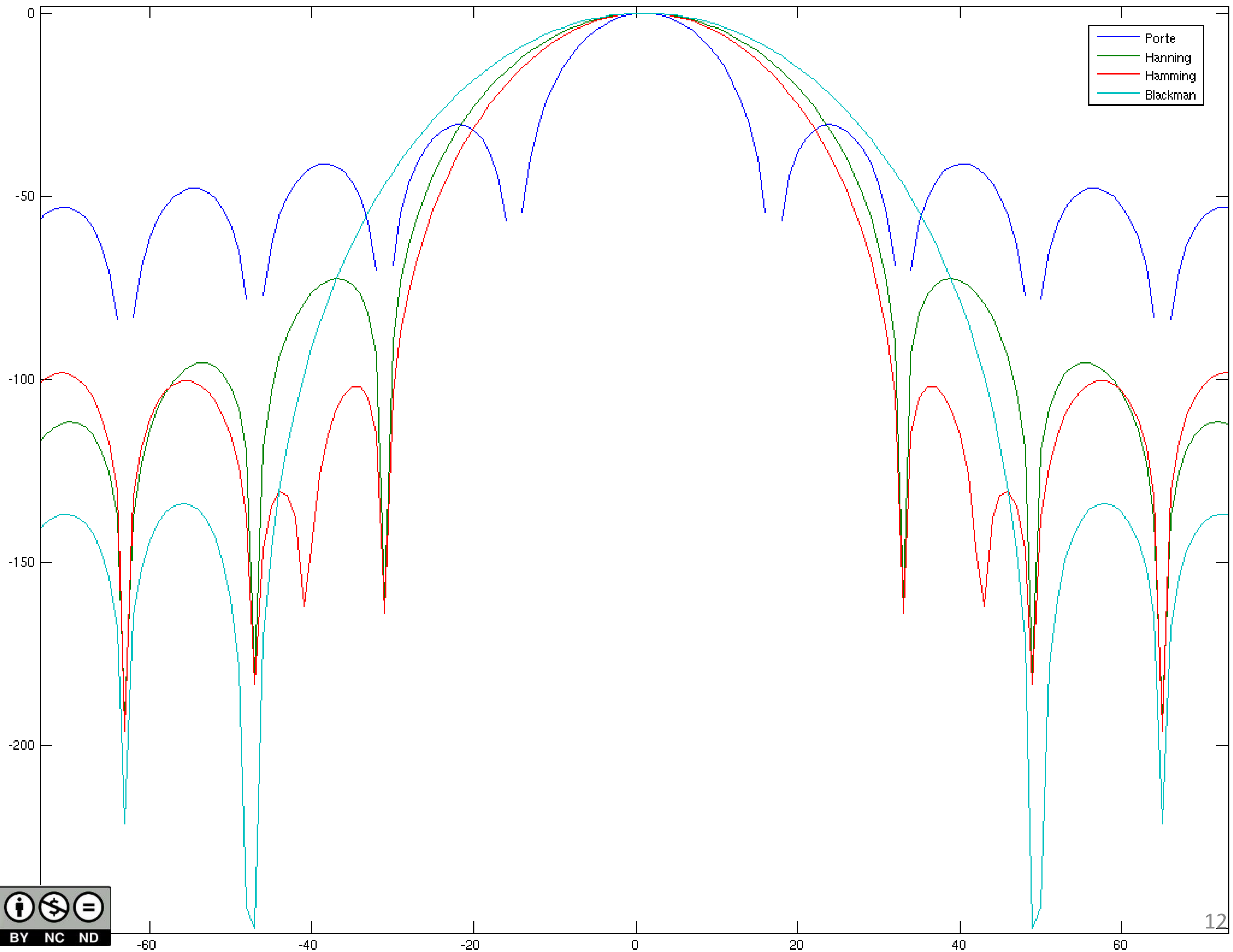
On note A l'atténuation du signal par rapport à une fenêtre rectangulaire,
W_{-3dB} la largeur à -3dB du pic principale de sa transformée de Fourier,
$\Delta f = \frac{f_e}{N}$ la résolution fréquentielle.

Nom	Expression	A (dB)	W_{-3dB}
Rectangulaire	1	0	$0.89 \cdot \Delta f$
Hamming	$0.54 + 0.46\cos(2\pi t)$	-30 dB	$1.30 \cdot \Delta f$
Hanning	$0.5(1 + \cos(2\pi t))$	-19 dB	$1.44 \cdot \Delta f$
Gaussienne	$\exp(-t^2)$	-42 dB	$1.55 \cdot \Delta f$

<u>Remarque 1 :</u> il en existe bien d'autre : triangulaire, exponentielle, flat-top, Blackman-Harris, Kaiser, etc…

<u>Remarque 2 :</u> les problèmes de fenêtrages en analyse numérique sont conceptuellement proches des problèmes d'apodisation en optique.


Porte
Hanning
Hamming
Blackman
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000


Porte
Hanning
Hamming
Blackman
0
-50
-100
-150
-200
-60
-40
-20
0
20
40
60

Quelques exemples pratiques

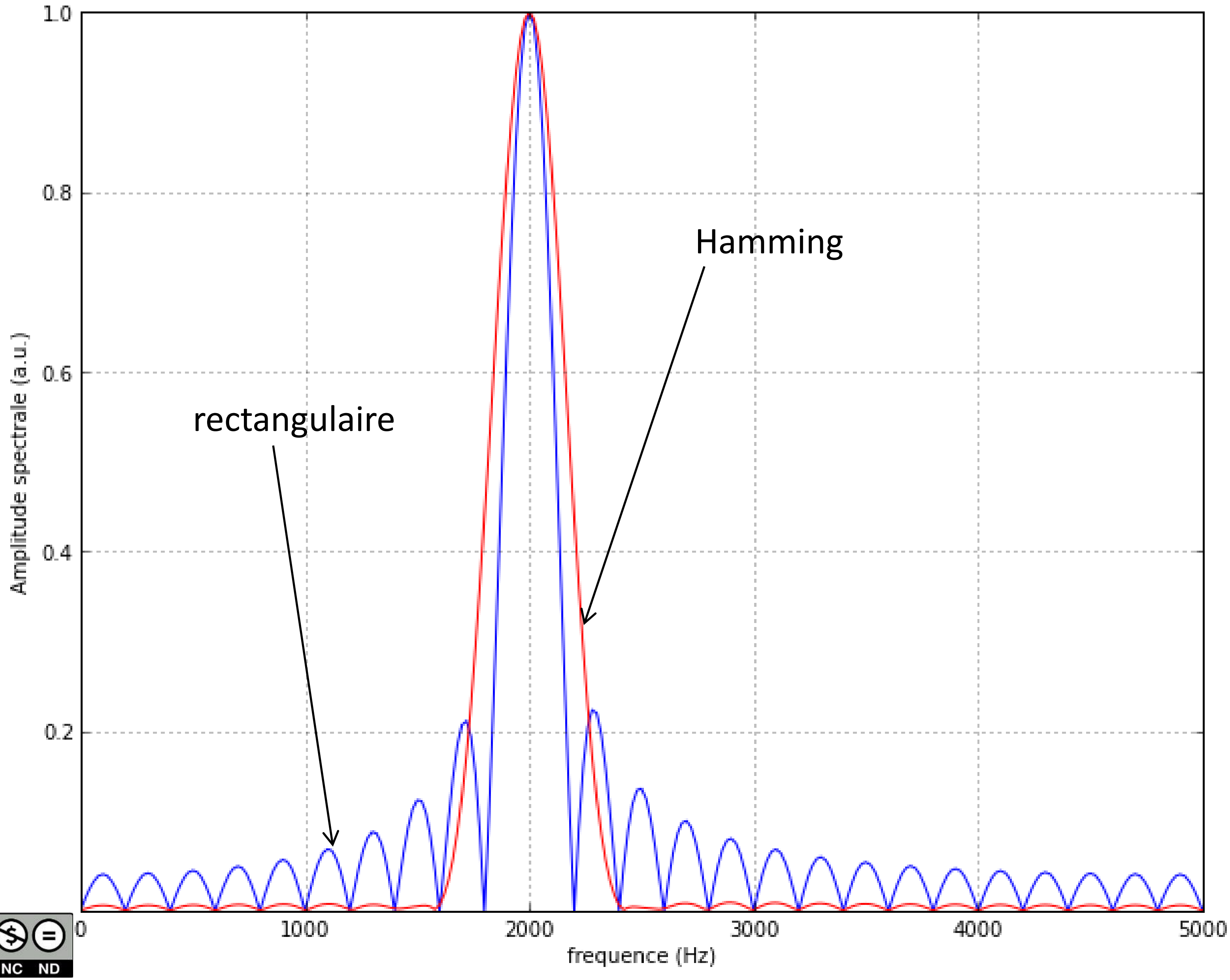
Le choix de l'utilisation de fenêtres n'a de réel intérêt que dans le cadre de ***l'analyse spectrale***, c'est-à-dire un signal composé de plusieurs composantes spectrales.

Signal : $x(t) = \cos(2\pi f t)$ avec $f = 2$kHz. Cas d'une TF avec une porte de 5ms.

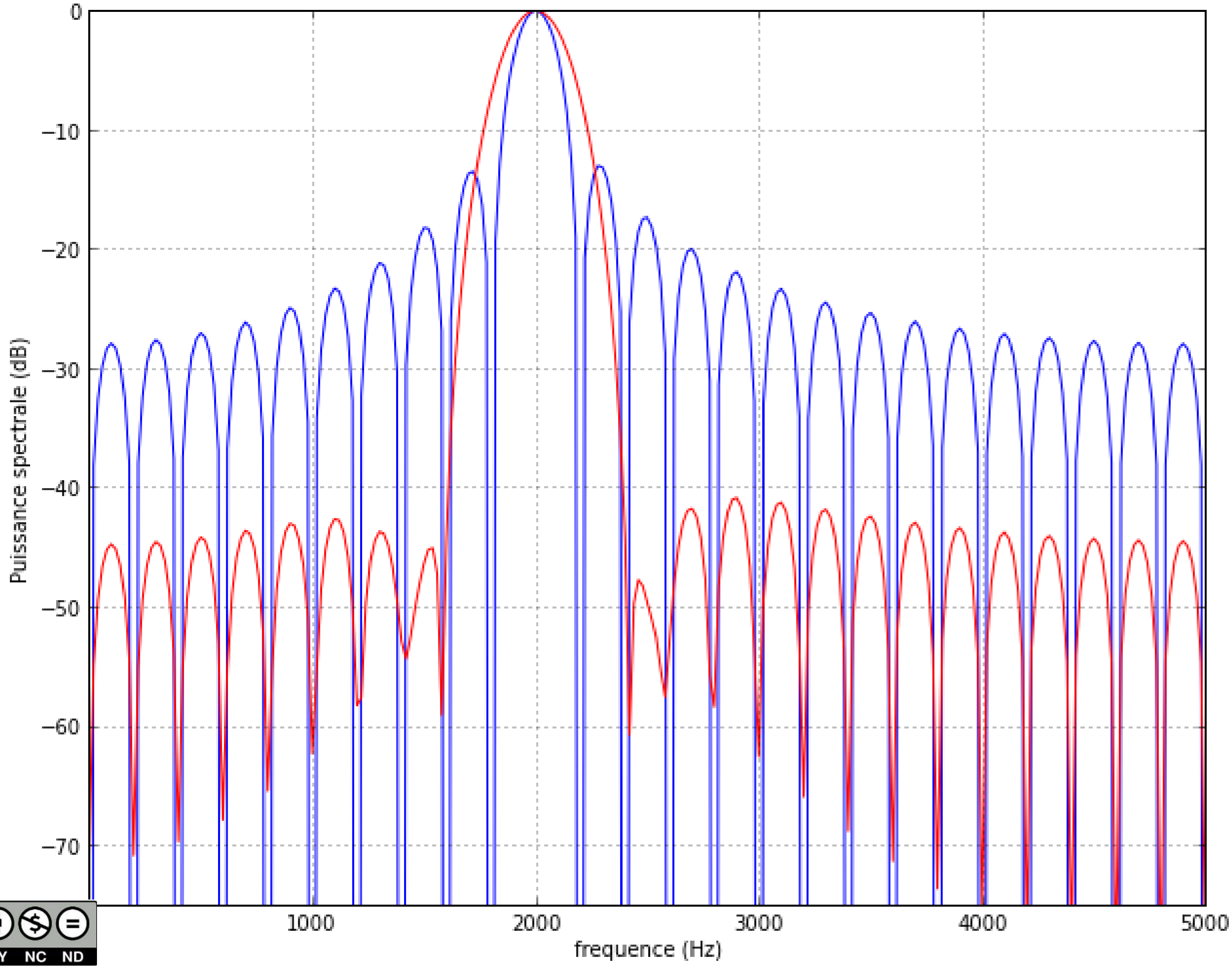
Comparaison entre une fenêtre rectangulaire (en bleu) et une fenêtre Hamming (en rouge).
La fenêtre Hamming permet de réduire l'amplitude des lobes, mais en contrepartie le lobe principale est élargi : la résolution en fréquence est dégradée.

Si les spectres sont normalisés correctement, on observe la diminution du signal spectral avec la fenêtre pondérée.

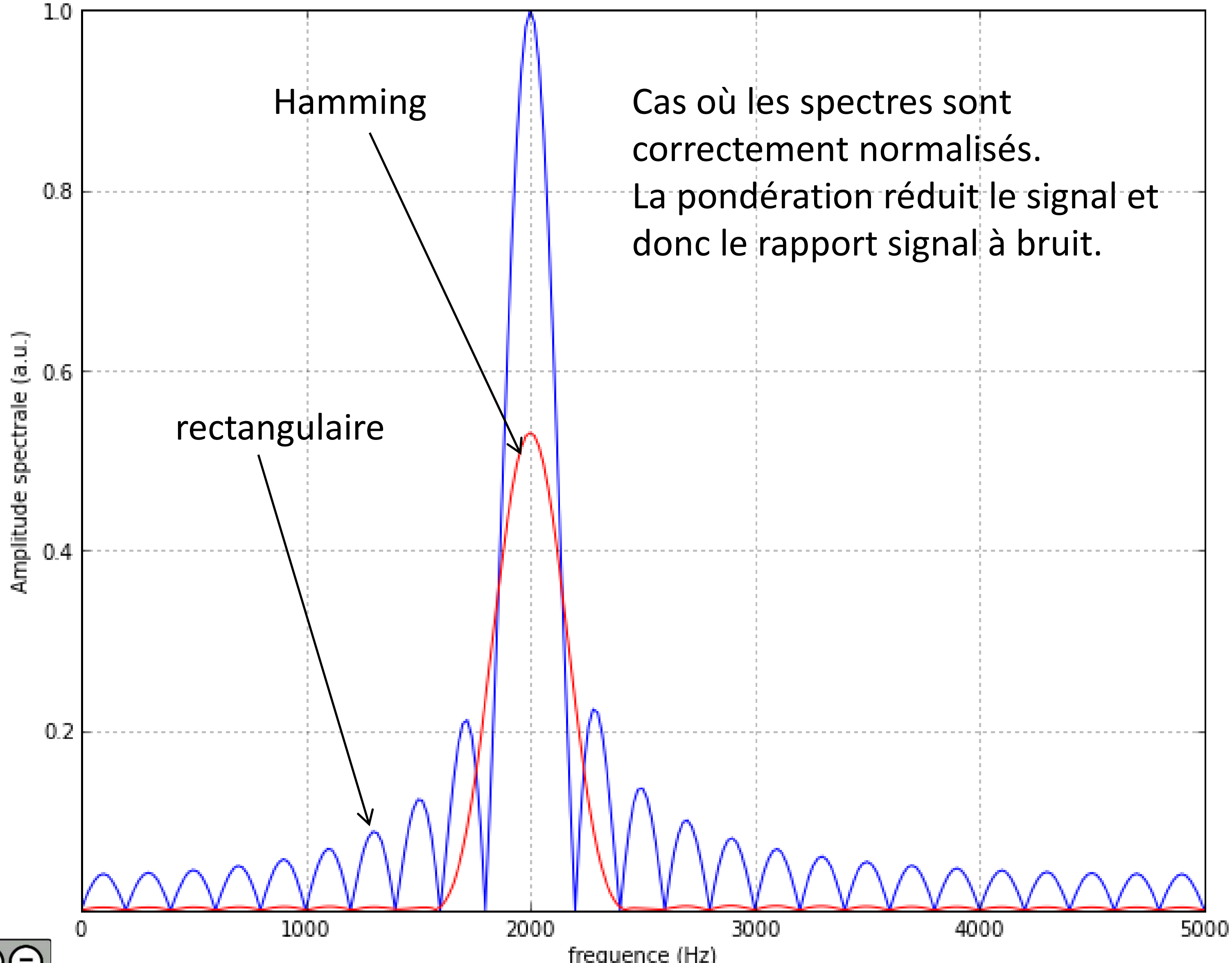
Quelques exemples pratiques



Quelques exemples pratiques

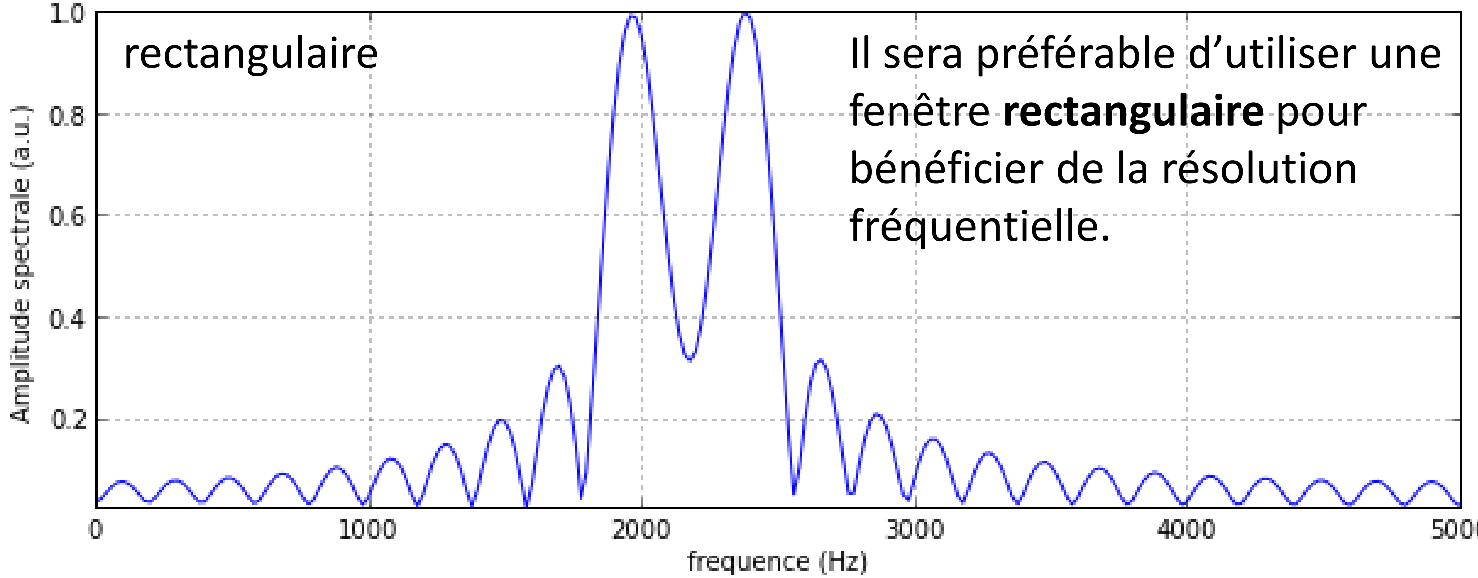


Quelques exemples pratiques

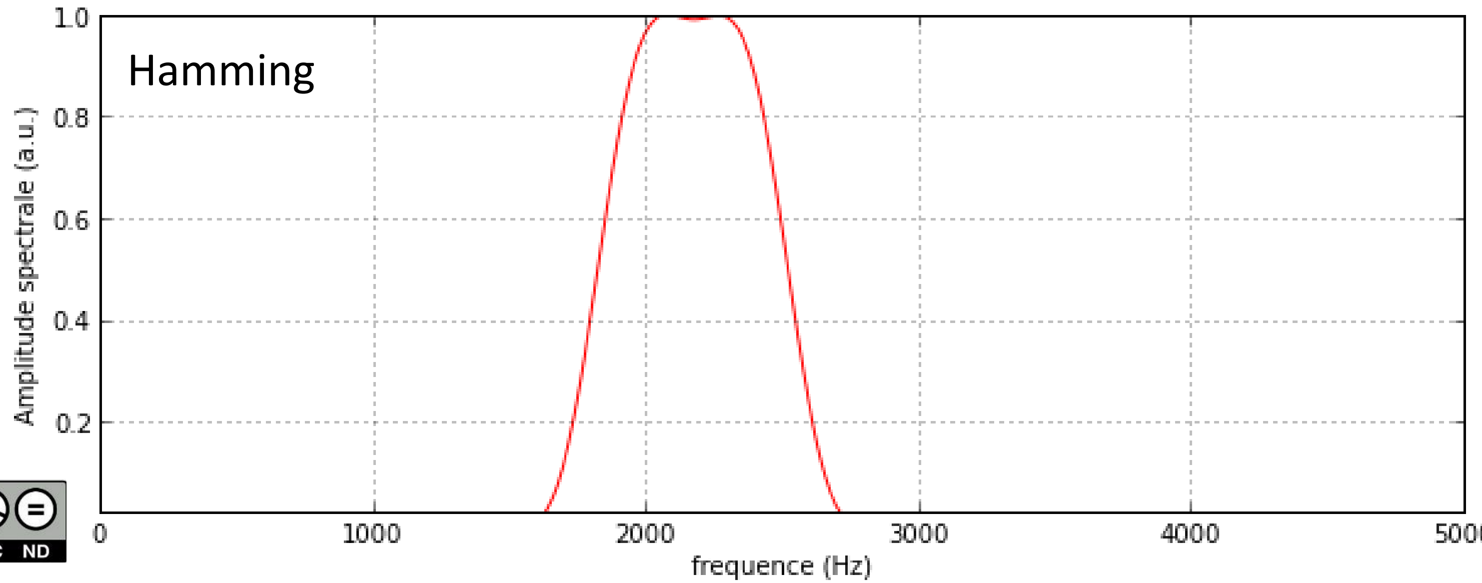


Quelques exemples pratiques

Signal : $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$ avec $f_1 = 2\text{kHz}$ et $f_2 = 2.35\text{kHz}$.

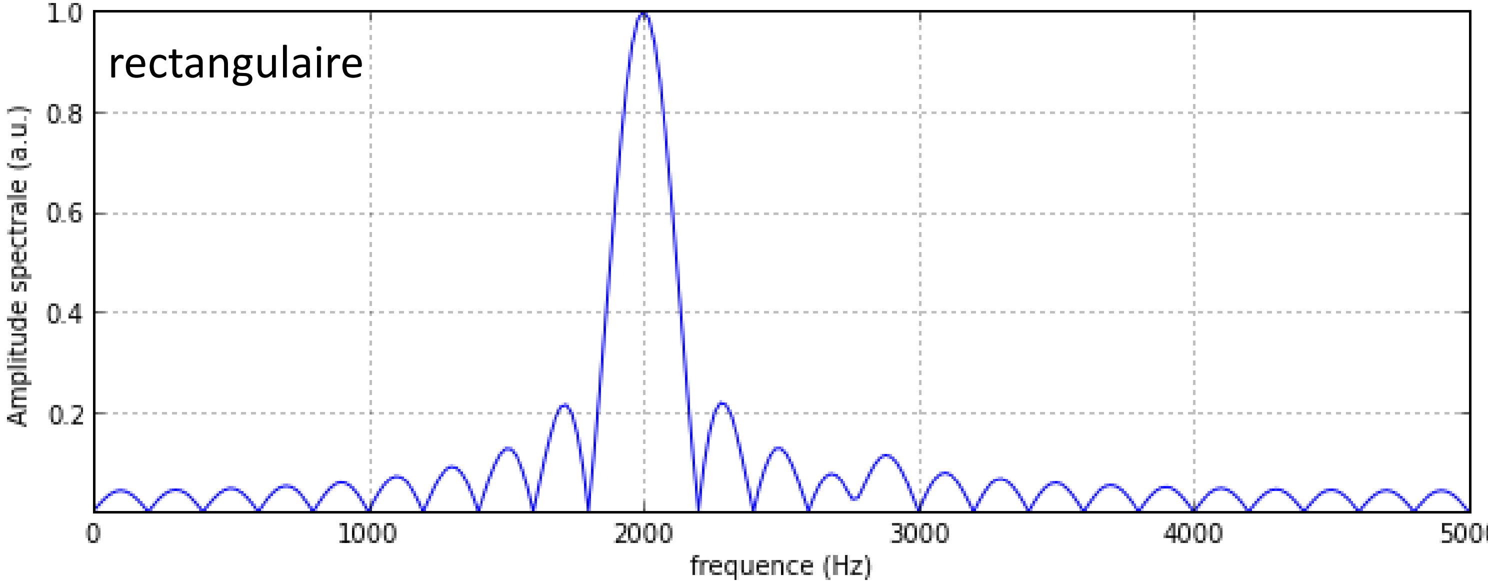


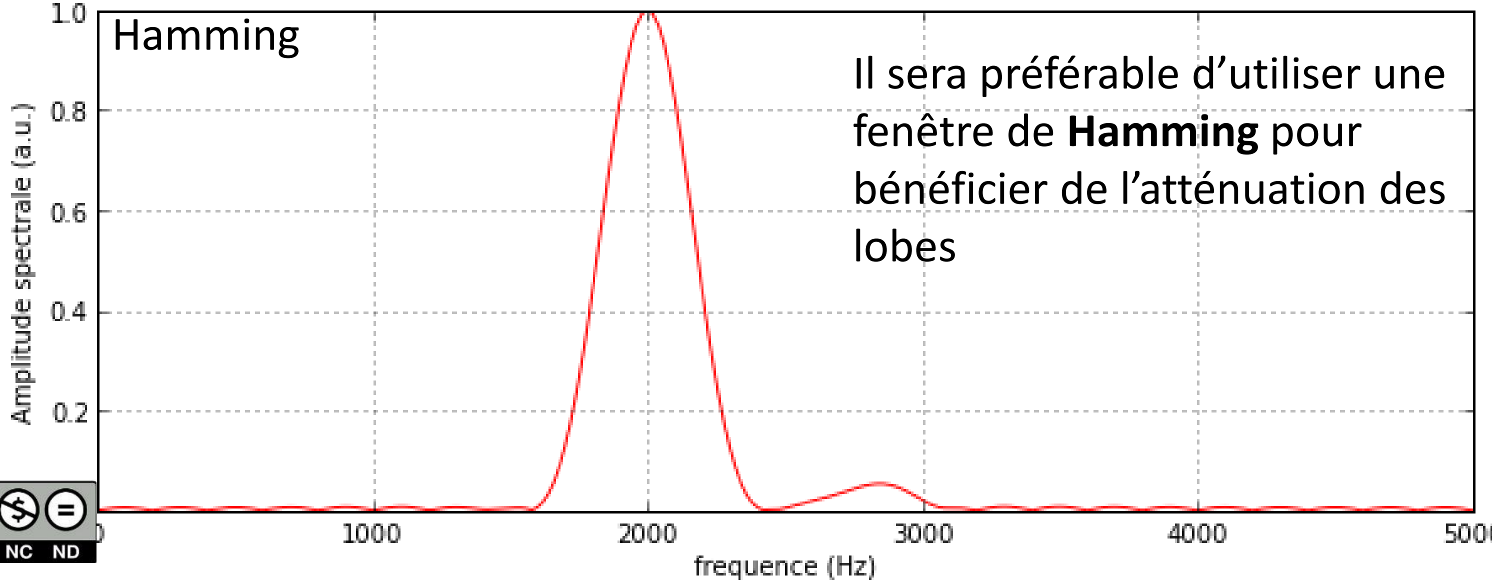
Il sera préférable d'utiliser une fenêtre **rectangulaire** pour bénéficier de la résolution fréquentielle.



Quelques exemples pratiques

Signal : $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \mathbf{0.05} \times \cos(2\pi f_2 t)$ avec $f_1 = 2\text{kHz}$ et $f_2 = 2.8\text{kHz}$.





Il sera préférable d'utiliser une fenêtre de **Hamming** pour bénéficier de l'atténuation des lobes

Cas des très faibles signaux : fenêtre de Blackman-Harris

Signal : $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \mathbf{0.0005} \times \cos(2\pi f_2 t)$ avec $f_1 = 2\text{kHz}$ et $f_2 = 3.5\text{kHz}$.