

**UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER**

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020



# **Électromagnétisme**

*HMEF104 - MEEF 2nd degré*

**Kenneth MAUSSANG**

*Version du 18 décembre 2019*

## HMEF104 - Electromagnétisme -

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "Attribution - Pas d'utilisation commerciale - Pas de modification 4.0 International".



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>

# Table des matières

<b>I. Champ et potentiel électrostatique</b>	<b>5</b>
1. Le théorème de superposition des champs élémentaires . . . . .	5
1.1. Charges ponctuelles . . . . .	5
1.2. Répartition continue de charges . . . . .	5
1.3. Expression de la charge élémentaire $\delta q(P)$ dans le cas d'une répartition linéique (un fil)	6
1.4. Expression de la charge élémentaire $\delta q(P)$ dans le cas d'une répartition surfacique . .	6
1.5. Expression de la charge élémentaire $\delta q(P)$ dans le cas d'une répartition volumique . .	6
2. Calcul du potentiel électrostatique . . . . .	6
2.1. Charges ponctuelles . . . . .	6
2.2. Répartition continue de charges . . . . .	7
2.3. Force et énergie . . . . .	8
3. Relations locales champ et potentiel en régime statique . . . . .	9
4. Le théorème de Gauss . . . . .	9
4.1. Utilisation pratique du théorème de Gauss . . . . .	9
4.2. Symétries et invariances . . . . .	10
4.3. Surface fermée . . . . .	10
5. Analogie avec la gravitation . . . . .	10
6. Continuité du champ et du potentiel électrostatique . . . . .	11
6.1. Cas d'un volume chargé . . . . .	11
6.2. Cas d'une surface chargée . . . . .	11
6.3. Cas d'un contour filiforme chargé ou d'une charge ponctuelle . . . . .	11
<b>II. Le dipôle électrostatique</b>	<b>13</b>
1. Présentation du problème . . . . .	13
1.1. Définition . . . . .	13
1.2. Symétrie . . . . .	13
2. Calcul des grandeurs électrostatiques . . . . .	13
2.1. Potentiel électrostatique . . . . .	13
2.2. Moment dipolaire . . . . .	15
2.3. Calcul du champ électrostatique $\vec{E}$ . . . . .	15
3. Diagramme de rayonnement (étude dans le plan) . . . . .	16
3.1. Equipotentiels . . . . .	16
3.2. Lignes de champ . . . . .	17
4. Action d'un champ $\vec{E}_0$ uniforme sur un dipôle . . . . .	17
4.1. Forces . . . . .	17
4.2. Moment des forces . . . . .	18
4.3. Équilibre . . . . .	18
5. Développement multipolaire . . . . .	18
<b>III. Champ magnétique</b>	<b>19</b>
1. Loi de Biot et Savard . . . . .	19
1.1. Champ créé par une répartition linéique de courants . . . . .	20
1.2. Champ créé par une répartition surfacique de courants . . . . .	20
1.3. Champ créé par une répartition volumique de courants . . . . .	20

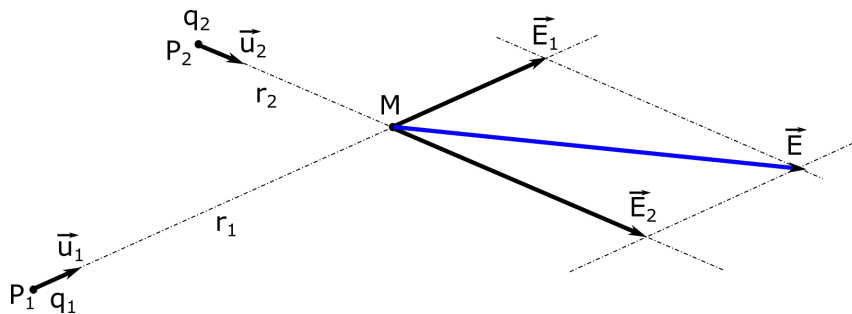
2. Théorème d'Ampère . . . . .	20
2.1. Enoncé . . . . .	20
2.2. Symétries et invariances . . . . .	21
2.3. Utilisation du théorème d'Ampère . . . . .	21
3. Moment magnétique $\vec{M}$ . . . . .	22
4. Le potentiel vecteur $\vec{A}$ . . . . .	22
<b>IV. Phénomènes d'induction</b>	<b>23</b>
1. Approche qualitative du phénomène d'induction . . . . .	23
1.1. Force de Laplace . . . . .	23
1.2. Constatations expérimentales . . . . .	23
2. Induction : circuit fixe dans un champ variable . . . . .	24
2.1. Loi de Faraday . . . . .	24
2.2. Principe de l'alternateur . . . . .	25
3. Induction : circuit mobile indéformable dans un champ fixe . . . . .	25
3.1. Changement de référentiel . . . . .	25
3.2. Circuit mobile dans un champ fixe - cas de Lorentz . . . . .	25
4. Force électromotrice induite . . . . .	26
4.1. Orientations du circuit (important) . . . . .	26
4.2. Induction dans un conducteur ohmique . . . . .	27
4.3. Loi de Faraday . . . . .	27
4.4. Loi de Lenz . . . . .	28
4.5. Champ électromoteur . . . . .	28
5. Induction mutuelle - autoinduction . . . . .	28
5.1. Induction mutuelle . . . . .	28
5.2. Autoinduction . . . . .	29
6. Couplage électromécanique : le haut-parleur . . . . .	30
6.1. Description . . . . .	30
6.2. Équation mécanique . . . . .	30
6.3. Équation électrique . . . . .	31
6.4. Conversion électromécanique . . . . .	31
6.5. Impédance motionnelle . . . . .	32
7. Quelques expériences possibles . . . . .	32
7.1. Mise en évidence qualitative des principales caractéristiques de la loi de Faraday . . . . .	32
7.2. Mise en évidence quantitative de la loi de Faraday . . . . .	33
7.3. Autre manipulation possible . . . . .	34
<b>V. Actions électromécaniques</b>	<b>35</b>
1. Actions découlant du champ électrique . . . . .	35
2. Energie . . . . .	35
2.1. Cas de deux charges ponctuelles . . . . .	35
2.2. Charge dans un champ électrique . . . . .	36
3. Actions découlant d'un champ magnétique . . . . .	36
4. Dipôles électrostatique et magnétique . . . . .	37

# I. Champ et potentiel électrostatique

La linéarité des comportements dans le vide conduit à utiliser le théorème de superposition pour calculer le champ électrostatique en un point M, champ créé par une répartition de charges.

## 1. Le théorème de superposition des champs élémentaires

### 1.1. Charges ponctuelles



**Fig. I.1.** Champ électrique généré par deux charges ponctuelles - théorème de superposition.

Soit  $q_1$  une charge élémentaire placée en  $P_1$ . Cette charge crée en un point M (différent de  $P_1$ ) quelconque de l'espace un champ

$$\vec{E}_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \vec{u}_1, \quad (\text{I.1})$$

avec  $r_1 = \|\vec{P_1M}\|$  et  $\vec{u}_1 = \frac{\vec{P_1M}}{r_1}$ . De même,  $q_2$  une charge élémentaire placée en  $P_2$  crée en M un champ

$$\vec{E}_2(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} \vec{u}_2. \quad (\text{I.2})$$

Le champ total créé par l'ensemble des 2 charges créera un champ total

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M). \quad (\text{I.3})$$

Cette propriété est extensible à un nombre quelconque de charges.

### 1.2. Répartition continue de charges

Lorsque la charge peut être modélisée par une répartition continue de charges, on s'intéressera à un "bout" de la répartition, la charge élémentaire quasi-ponctuelle et on fera la somme (continue donc une intégrale) des champs créés par chacune de ces charges en M pour obtenir le champ  $\vec{E}(M)$  créé par la totalité de la répartition.

Soit  $\delta q(P)$  une charge élémentaire placée en P (autour de P en fait). Cette charge élémentaire crée en M un champ dont l'expression est issue du champ créé par une charge ponctuelle

$$\delta\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q}{r^2} \vec{u}, \quad (\text{I.4})$$

avec  $r = \|\vec{PM}\|$  et  $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{r}$ . Le champ total en M sera donné par

$$\vec{E}(M) = \int \delta\vec{E}(M). \quad (\text{I.5})$$

L'intégrale sera simple, double ou triple selon que la répartition est linéique, surfacique ou volumique.

### 1.3. Expression de la charge élémentaire $\delta q(P)$ dans le cas d'une répartition linéique (un fil)

Soit  $\lambda(P)$  la densité linéique de charge en P. La charge élémentaire  $\delta q$  contenue par un segment de longueur  $dl$  en P vaut

$$\delta q(P) = \lambda(P) \cdot dl. \quad (I.6)$$

Le champ total créé par la répartition linéique de charge s'exprime alors selon

$$\vec{E}(M) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)}{r(P)^2} \vec{u}(P) dl. \quad (I.7)$$

### 1.4. Expression de la charge élémentaire $\delta q(P)$ dans le cas d'une répartition surfacique

Soit  $\sigma(P)$  la densité surfacique de charge en P. La charge élémentaire  $\delta q$  contenue par une surface élémentaire  $dS$  en P vaut

$$\delta q(P) = \sigma(P) \cdot dS. \quad (I.8)$$

Le champ total créé par la répartition surfacique de charge s'exprime alors selon

$$\vec{E}(M) = \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)}{r(P)^2} \vec{u}(P) dS. \quad (I.9)$$

### 1.5. Expression de la charge élémentaire $\delta q(P)$ dans le cas d'une répartition volumique

Soit  $\rho(P)$  la densité volumique de charge en P. La charge élémentaire  $\delta q$  contenue dans un volume élémentaire  $dV$  en P vaut

$$\delta q(P) = \rho(P) \cdot dV. \quad (I.10)$$

Le champ total créé par la répartition volumique de charge s'exprime alors selon

$$\vec{E}(M) = \iiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)}{r(P)^2} \vec{u}(P) dV. \quad (I.11)$$

## 2. Calcul du potentiel électrostatique

La linéarité des comportements dans le vide conduit à utiliser le théorème de superposition pour calculer le potentiel électrostatique en un point M, champ créée par une répartition de charges.

### 2.1. Charges ponctuelles

Soit  $q_1$  une charge élémentaire placée en  $P_1$ . Cette charge crée en un point M (différent de  $P_1$ ) quelconque de l'espace un champ électrique auquel on associe le potentiel électrostatique suivant

$$V_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \text{Cte}, \quad (I.12)$$

avec  $r_1 = |\vec{P_1M}|$ .

De même,  $q_2$  une charge élémentaire placée en  $P_2$  crée en M un potentiel électrostatique

$$V_2(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} + \text{Cte}. \quad (I.13)$$

Le champ total créé par l'ensemble des deux charges créera un champ total

$$V = V_1 + V_2. \quad (I.14)$$

Cette propriété est extensible à un nombre quelconque de charges.

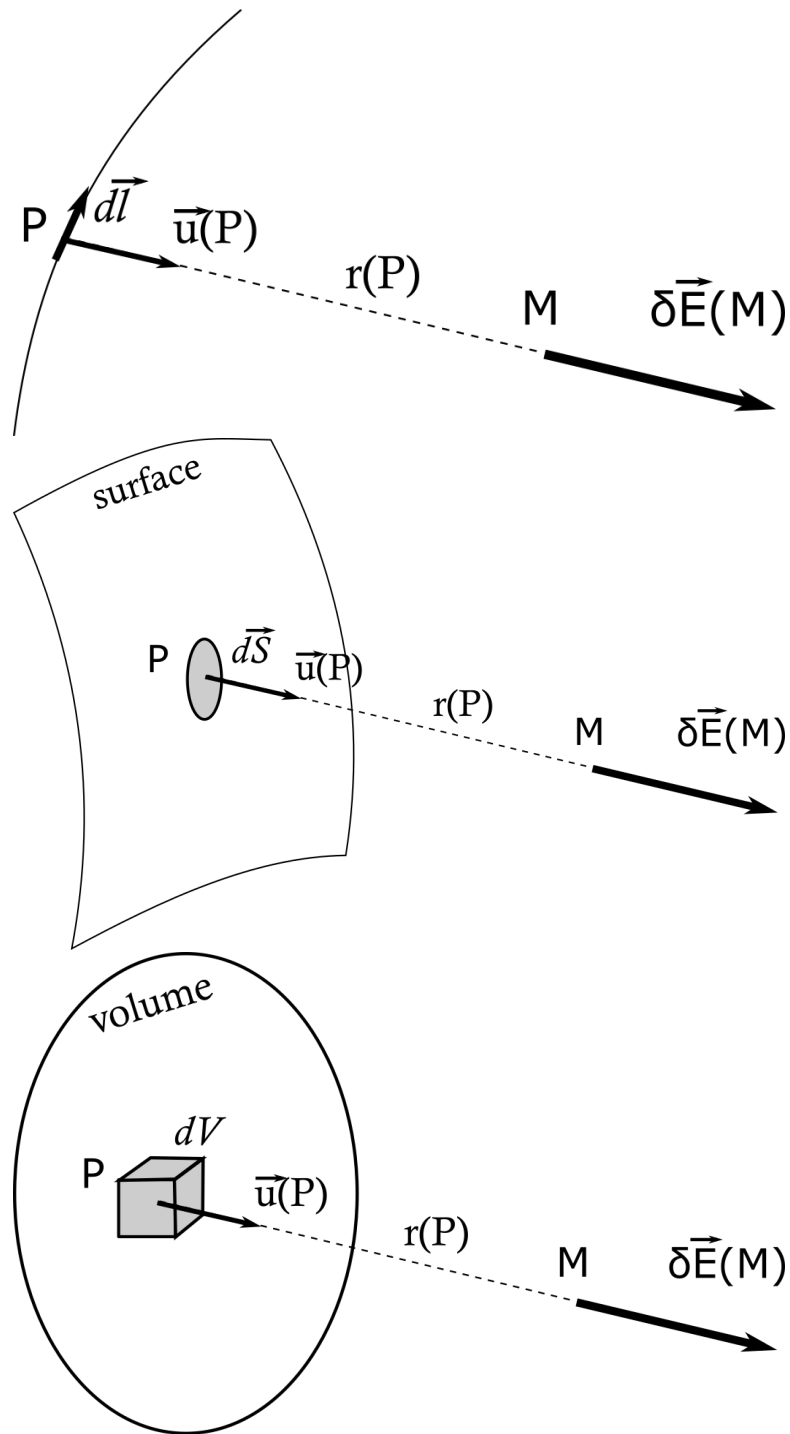


Fig. I.2. Distributions linéiques, surfaciques et volumiques.

## 2.2. Répartition continue de charges

Distribution linéique

$$V(M) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)}{r(P)} dl. \quad (\text{I.15})$$

Distribution surfacique

$$V(M) = \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)}{r(P)} dS. \quad (\text{I.16})$$

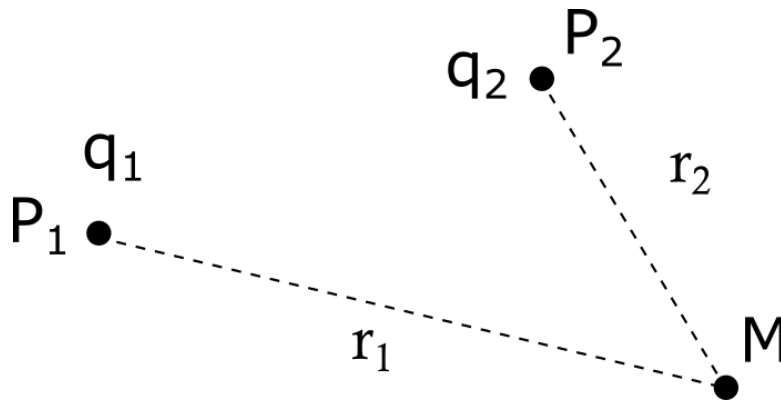


Fig. I.3. Champ créé par la superposition de deux charges  $q_1$  et  $q_2$ .

Distribution volumique

$$V(M) = \iiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)}{r(P)} dV. \quad (I.17)$$

### 2.3. Force et énergie

Soit  $q_1$  une charge élémentaire placée en  $P_1$ ,  $q_2$  une charge élémentaire placée en  $P_2$ . La charge  $q_2$  est soumise à une force de par la présence du champ de  $q_1$

$$\vec{f}_{12} = q_2 \vec{E}_1(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d_{12}^2} \vec{u}_{12}. \quad (I.18)$$

Réciproquement, la charge  $q_1$  est dans le champ de  $q_2$  et est soumise à une force

$$\vec{f}_{21} = q_1 \vec{E}_2(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d_{12}^2} \vec{u}_{21}. \quad (I.19)$$

De plus,  $\vec{u}_{12} = -\vec{u}_{21}$ , donc le principe d'actions réciproques (3ième loi de Newton) est vérifiée.

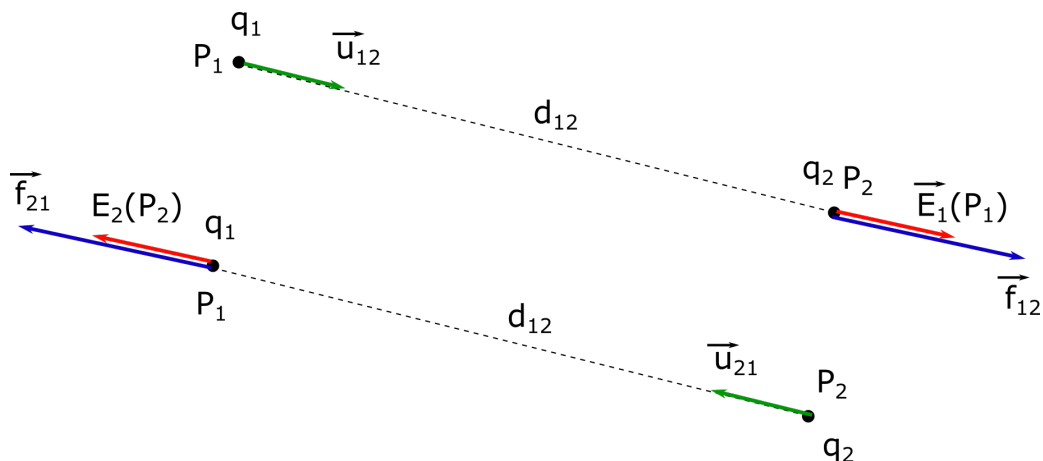


Fig. I.4. Force électrostatique entre deux charges.

L'énergie potentielle  $E_{p2}$  de  $q_2$  dans le champ créé par  $q_1$  est donnée par la relation  $\vec{f}_{12} = -\vec{\text{grad}} E_{p2}$ . D'où

$$\vec{f}_{12} = q_2 \vec{E}_1(P_2) = -q_2 \vec{\text{grad}} V_1(P_2) = -\vec{\text{grad}} (q_2 V_1(P_2)). \quad (I.20)$$

Il en résulte que

$$E_{p2} = q_2 V_1(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d_{12}}. \quad (I.21)$$



De même l'énergie potentielle  $E_{p1}$  de  $q_1$  dans le champ créé par  $q_2$  est donné par

$$E_{p1} = q_1 V_2(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d_{12}}. \quad (I.22)$$

Ces deux valeurs sont identiques. On appelle cette valeur commune l'"énergie potentielle d'interaction entre les deux charges".

### 3. Relations locales champ et potentiel en régime statique

On a la relation suivante en le champ électrique et le potentiel électrostatique en régime quasistatique

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}V(M). \quad (I.23)$$

**Attention**, cette relation n'est valable qu'en régime quasistatique. Elle n'est valable que lorsque  $\vec{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}$ .

Les équations de Maxwell permettent d'obtenir l'équation de Poisson selon

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0. \quad (I.24)$$

Cette dernière est obtenue en utilisant la relation précédente et l'équation de Maxwell  $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Dans le cas général, elle devient

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0. \quad (I.25)$$

### 4. Le théorème de Gauss

Soit un volume  $V$  délimité par une surface  $\Sigma$  fermée. Soit  $\vec{E}(P)$  le champ électrique au point courant  $P$  de l'espace, et  $Q_{int}$  la charge contenue dans le volume  $V$ . Le théorème de Gauss permet de relier le flux de champ électrique à travers la surface  $\Sigma$  à la charge  $Q_{int}$  contenue dans le volume  $V$

$$\iint_{\Sigma} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}. \quad (I.26)$$

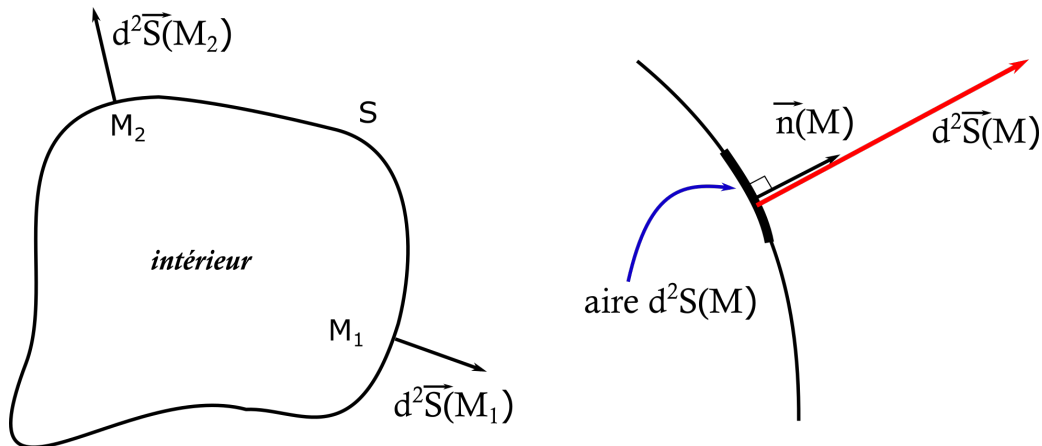


Fig. I.5. Orientation d'une surface fermée et définition du vecteur surface élémentaire.

#### 4.1. Utilisation pratique du théorème de Gauss

Pour exploiter le théorème de Gauss, il faut que le flux soit facilement calculable. Il faut donc pleinement exploiter les **symétries et invariances** du champ électrique dans le cas considéré (ex. : symétrie sphérique). Il faut choisir une surface fermée  $\Sigma$  simple, image des symétries du champ, afin de simplifier le calcul du flux. Toutes les charges contenues dans le volume  $V$  doivent être comptabilisées (qu'elles soient ponctuelles, linéiques ou volumiques).

## 4.2. Symétries et invariances

L'étude des symétries du vecteur champ électrique permet de déterminer la direction du champ électrique. En particuliers, le champ électrique en  $M$  est contenu dans tout plan de symétrie de la distribution de charge passant par  $M$ . De manière générale, le champ électrique possède les mêmes propriétés de symétrie que la distribution de charge dont il est issu.

Les propriétés d'invariances permettent de trouver de quelles coordonnées ne dépend pas le module du champ électrique. Par exemple, dans le cas d'une distribution de charge à symétrie sphérique, le module du champ électrique ne dépend que de la distance au centre de cette symétrie sphérique ( $E(r, \theta, \varphi) = E(r)$ ).

## 4.3. Surface fermée

Une surface est fermée si on est obligé de la traverser pour passer de l'intérieur vers l'extérieur. Cette surface sera, dans le cadre du théorème de Gauss, nécessairement orientée de l'intérieur vers l'extérieur. C'est la normale en tout point de cette surface qui en détermine l'orientation.

Le flux **sortant** est donné par

$$\Phi = \iint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d^2\vec{\Sigma}(M), \quad (\text{I.27})$$

avec  $\Sigma$  la surface fermée,  $\vec{E}(M)$  est le champ en  $M$  appartenant à  $\Sigma$ , et  $d^2\vec{\Sigma}(M) = d^2\Sigma(M) \cdot \vec{n}$  (où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur de la surface  $\Sigma$ ).

### Mise en oeuvre du théorème de Gauss

- Identifier les symétries et les invariances de  $\vec{E}$ .
- Choisir une surface fermée (qui n'a aucune réalité et que vous inventez à votre guise) de manière à ce que le flux soit facile à calculer. On prendra en général des surfaces dont la normale est colinéaire ou orthogonale à  $\vec{E}$ , et sur laquelle le module de  $\vec{E}$  est constant ou d'expression simple. Pour cela il faut pleinement exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance du système considéré.
- Calculez le flux sortant à travers cette surface fermée.
- Identifier tous les types de charges qui se situent à l'intérieur de la surface fermée et en faire la somme.
- Ecrire l'égalité du théorème de Gauss

$$\Phi = \iint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d^2\vec{\Sigma}(M) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}. \quad (\text{I.28})$$

On en déduit une relation qui permet avec la connaissance du sens de  $\vec{E}$  (voir symétries) de trouver le vecteur  $\vec{E}$  en tout point de l'espace.

Remarque : le théorème de Gauss se démontre à partir de l'équation de Maxwell-Gauss

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{I.29})$$

et l'utilisation du théorème de Green-Ostrogradsky.

## 5. Analogie avec la gravitation

Le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle  $q$  en  $M$  à une distance  $r$  a pour expression

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}. \quad (\text{I.30})$$

Le champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle  $m$  en  $M$  à une distance  $r$  a pour expression

$$\vec{g}(M) = -\mathcal{G} \frac{m}{r^2} \vec{u}. \quad (\text{I.31})$$

Il en résulte, par analogie, le théorème de Gauss appliqué à la gravitation

	Electrostatique	Gravitation
Champ	$\vec{E}$	$\vec{g}$
Grandeur	$q$	$m$
Constante	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-\mathcal{G}$
Théorème de Gauss	$\iint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d^2\vec{\Sigma}(M) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\iint_{M \in \Sigma} \vec{g}(M) \cdot d^2\vec{\Sigma}(M) = -4\pi\mathcal{G}m_{int}$

## 6. Continuité du champ et du potentiel électrostatique

### 6.1. Cas d'un volume chargé

Le champ et le potentiel restent continus à la traversée d'un volume chargé. Lorsque l'on passe d'une zone sans charges volumiques à une zone chargée en volume, les valeurs à la limite entre les deux zones sont identiques des deux côtés de la frontière entre les deux zones. Le champ et le potentiel électrostatique sont continus.

### 6.2. Cas d'une surface chargée

Le champ présente une discontinuité. En fait, il n'est pas défini sur la surface chargée, il a une valeur d'un côté et une autre de l'autre côté de la surface chargée. Par exemple, dans le cas d'un plan infini, uniformément chargé, le calcul conduit à deux valeurs de champs distinctes de chaque côté de la surface.

Cas particulier : dans le cas d'un plan infini, chargé avec une densité surfacique de charge  $\sigma$ , le champ à la surface a pour valeur  $\pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$  et donc présente une discontinuité de champ de  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Le potentiel en revanche ne présente pas de discontinuité. Au niveau de la surface, il aura la même valeur des deux côtés.

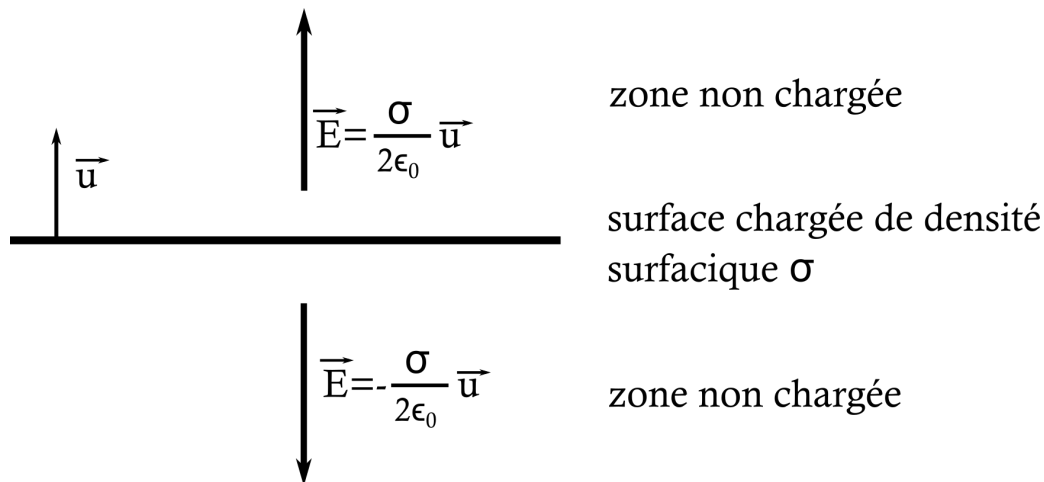


Fig. I.6. Champ d'une surface chargée infinie de charge surfacique  $\sigma$ .

### 6.3. Cas d'un contour filiforme chargé ou d'une charge ponctuelle

Le champ et le potentiel présentent une discontinuité à la traversée d'un contour chargé ou d'une charge ponctuelle (ils ne sont pas définis sur la zone chargée en question).



## II. Le dipôle électrostatique

### 1. Présentation du problème

#### 1.1. Définition

Un dipôle électrostatique est constitué par un système de deux charges  $+q$  et  $-q$ , ponctuelles, de signes opposés et distantes de  $2a$ . Ce doublet sera considéré comme un dipôle si la distance  $r$  du point considéré au milieu  $O$  des charges est grande devant  $a$ . Ce dipôle génère en  $M$ , distant de  $r = \|\vec{OM}\|$  au dipôle, un champ électrique  $\vec{E}(M)$  et un potentiel  $V(M)$ .

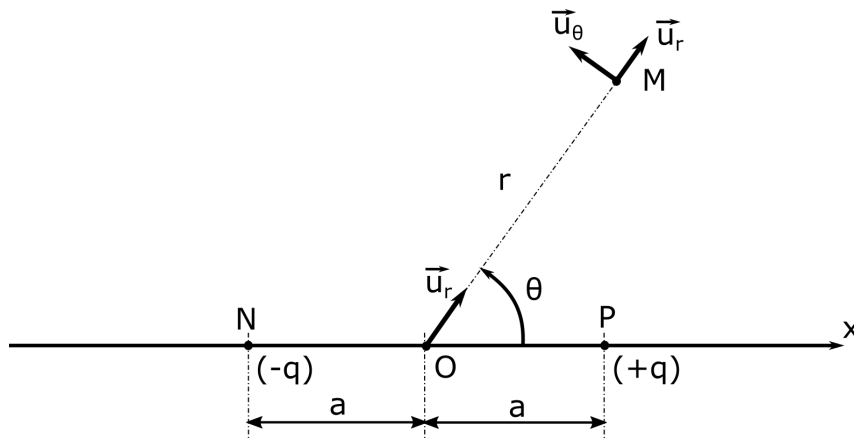


Fig. II.1. Dipôle électrostatique constitué de deux charges  $+q$  et  $-q$ .

#### 1.2. Symétrie

Les deux charges sont alignées selon l'axe  $(O, x)$  associé au repère cartésien de centre  $O$ . On est en présence d'une symétrie cylindrique d'axe  $(O, x)$ . En un point  $M$  de l'espace, le champ électrique  $\vec{E}(M)$  est donc nécessairement contenu dans le plan  $(O, M, x)$  contenant  $M$  et les deux charges. On travaillera donc dans ce plan, en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ .

### 2. Calcul des grandeurs électrostatiques

Il n'y a pas assez de symétries pour appliquer le théorème de Gauss de manière efficace. Le calcul le plus simple est celui du potentiel électrostatique  $V(r, \theta)$ , et d'en déduire ensuite  $\vec{E}(r, \theta) = -\vec{\text{grad}}V(r, \theta)$ .

#### 2.1. Potentiel électrostatique

On considère un dipôle constitué de deux charges  $-q$  et  $+q$  respectivement en  $N$  et  $P$ , avec  $\overline{NP} = 2a$ . On note  $O$  le milieu du segment  $[N, P]$  que l'on prend comme origine des coordonnées polaires. L'axe  $(O, x)$  est porté par  $(N, P)$ . Tout point  $M$  du plan est décrit par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  avec  $r \gg a$ . On note  $r_n = \|\vec{NM}\|$  et  $r_p = \|\vec{PM}\|$ .

## HMEF104 - Electromagnétisme - II. Le dipôle électrostatique

Le potentiel créé en  $M$  est la somme des potentiels créés par chacune des charges (théorème de superposition). En effectuant un développement limité à l'ordre 1 en  $a/r$  on obtient

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{q}{r_n} + \frac{q}{r_p} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_n} \right]. \quad (\text{II.1})$$

Etablissons la valeur de  $r_n$  en fonction de  $a$ ,  $r$ ,  $\theta$  de façon à pouvoir effectuer un DL en  $a/r$ ,  $\theta$  pouvant varier. On a

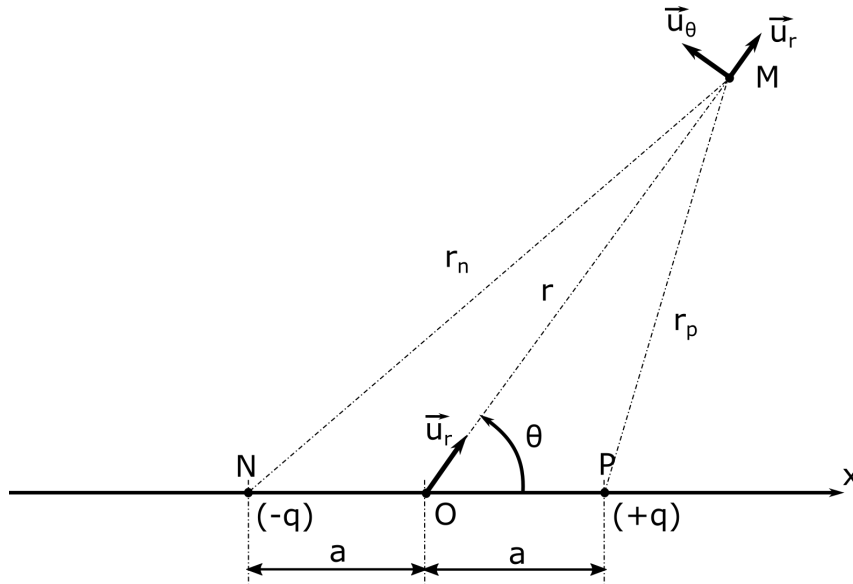
$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM}, \quad (\text{II.2})$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{NM})^2 = (\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{NO}^2 + \overrightarrow{OM}^2 + 2\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{OM}, \quad (\text{II.3})$$

$$\Rightarrow r_n^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta, \quad (\text{II.4})$$

$$\Rightarrow r_n^2 = r^2 \left[ 1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{r}\right) \cos \theta \right], \quad (\text{II.5})$$

$$\Rightarrow r_n^{-1} = r^{-1} \left[ 1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{r}\right) \cos \theta \right]^{-1/2}. \quad (\text{II.6})$$



**Fig. II.2.** Calcul du potentiel électrostatique.

On pose  $\epsilon = \frac{a}{r} \ll 1$ . On a le développement limité suivant

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2). \quad (\text{II.7})$$

D'où le développement limité à l'ordre le plus bas en  $\epsilon$

$$\left[ 1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{r}\right) \cos \theta \right]^{-1/2} \approx 1 - \frac{a}{r} \cos \theta. \quad (\text{II.8})$$

On obtient finalement

$$\frac{1}{r_n} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right]. \quad (\text{II.9})$$

De même

$$r_p^2 = \|\overrightarrow{PM}\|^2 = (-\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM})^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta, \quad (\text{II.10})$$

et de manière analogue

$$\frac{1}{r_p} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right]. \quad (\text{II.11})$$

D'où l'expression du potentiel électrostatique créé par le dipôle à une distance  $r \gg a$ .

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_n} \right] \Rightarrow V(M) = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta. \quad (\text{II.12})$$

## 2.2. Moment dipolaire

On introduit le moment dipolaire  $\vec{p}$  associé au dipôle défini selon

$$\vec{p} = q\vec{NP}. \quad (\text{II.13})$$

Soit  $p = \|\vec{p}\|$  et  $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$  (vecteur unitaire). On a alors

$$\vec{p} \cdot \vec{u} = p \cos \theta, \quad (\text{II.14})$$

et avec  $\|\vec{NP}\| = 2a$ . On obtient ainsi une expression intrinsèque du potentiel électrostatique dipolaire selon

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (\text{II.15})$$

L'unité du moment dipolaire est le Coulomb.mètre dans le système international (C · m), et pour unité usuelle le Debye (D) avec la correspondance suivante

$$1D = \frac{1}{3} 10^{-29} \text{C} \cdot \text{m}. \quad (\text{II.16})$$

## 2.3. Calcul du champ électrostatique $\vec{E}$

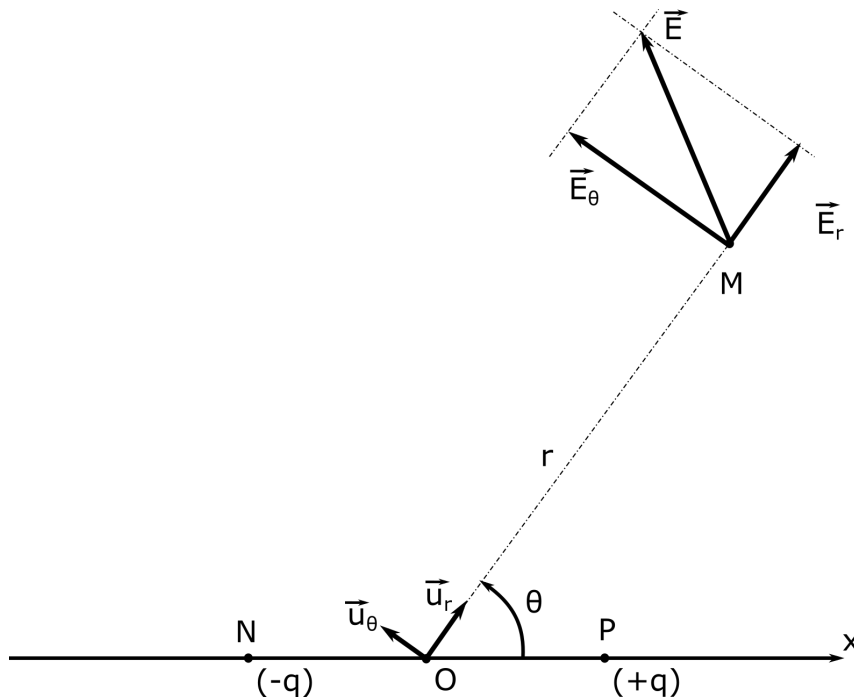


Fig. II.3. Calcul du champ électrostatique.

Une fois que l'on a obtenu le potentiel  $V$ , on peut calculer le champ électrique à partir de la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ . Projeté sur la base polaire locale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , on obtient

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta, \quad (\text{II.17})$$

avec

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (\text{II.18})$$

et

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (\text{II.19})$$

### 3. Diagramme de rayonnement (étude dans le plan)

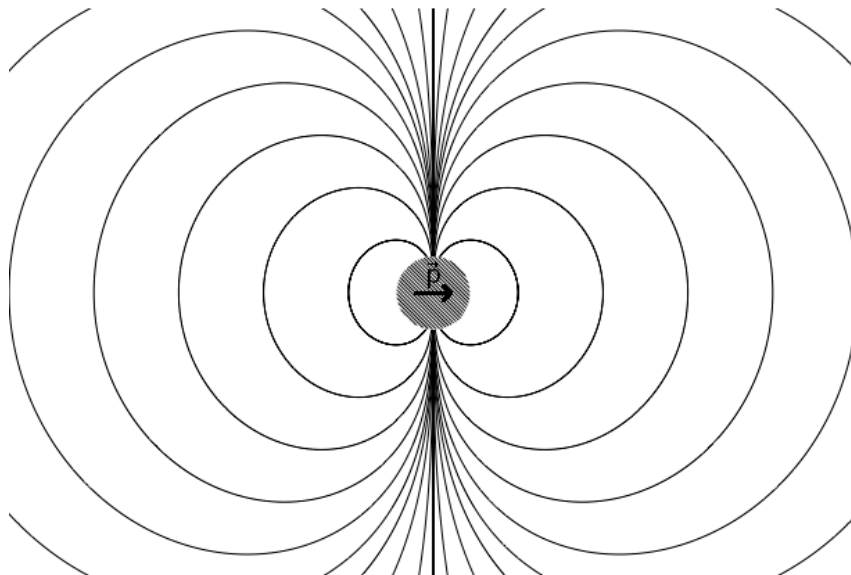
#### 3.1. Equipotentiellles

Les équipotentiellles sont données par l'équation  $V(r, \theta) = \text{Cte}$ . En dimension 3, il s'agit de surfaces. En dimension 2, il s'agit de lignes.

$$V(r, \theta) = V_0 \Rightarrow r^2 = V_0^{-1} \cos \theta, \quad (\text{II.20})$$

ainsi chaque valeur de  $V_0$  donne une équipotentielle d'équation correspondante. Pour tracer le diagramme de rayonnement, on exploite les propriétés suivantes :

- $r$  est maximal pour  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ ;
- $r(\theta = \frac{\pi}{2}) = r(\theta = \frac{3\pi}{2}) = 0$ ;
- $r(\theta)$  est croissante pour  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  et décroissante pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ;
- $r(-\theta) = r(\theta)$ , on a donc une symétrie centrale par rapport à l'origine  $O$ ;
- si  $V_0 > 0$ ,  $r$  est définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ ;
- si  $V_0 < 0$ ,  $r$  est définie sur  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ .



**Fig. II.4.** Equipotentiellles d'un dipôle électrostatique. Extrait de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Equipotdipoleelec.png>.



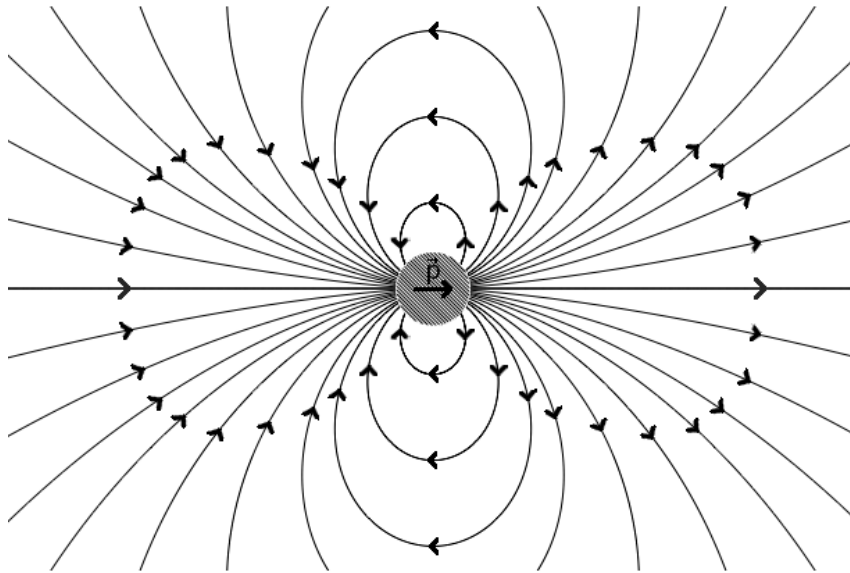


Fig. II.5. Lignes de champ d'un dipôle électrostatique. Extrait de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Equipotdipoleelec.png>.

### 3.2. Lignes de champ

Les lignes de champs sont tangentes au vecteur champ électrique  $\vec{E}$ . Elles sont formées par les  $M$  de l'espace tels que  $d\vec{OM}$  et  $\vec{E}$  soient colinéaires. En coordonnées polaires dans le plan, on a

$$\begin{cases} d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta \\ \vec{E} = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Sur une ligne de champ,  $\vec{E}$  et  $d\vec{OM}$  sont colinéaires donc  $\vec{E} \wedge d\vec{OM} = 0$  soit

$$drE_\theta - E_r r d\theta = 0 \Rightarrow 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \frac{dr}{r}, \quad (\text{II.22})$$

d'où, en intégrant,

$$\ln r = 2 \ln |\sin \theta| + \text{Cte}, \quad (\text{II.23})$$

soit finalement

$$r = B \sin^2 \theta, \quad B \in \mathbb{R}^+. \quad (\text{II.24})$$

La constante  $B$  est une constante d'intégration.

Remarque : les lignes de champs sont orthogonales aux surfaces équipotentielles. En effet,  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$  et  $dV = \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{OM}$ . Donc si  $dV = 0$ ,  $\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{OM} = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} = 0$ .

## 4. Action d'un champ $\vec{E}_0$ uniforme sur un dipôle

### 4.1. Forces

Si le champ électrique  $\vec{E}$  est uniforme, c'est-à-dire le même en tout point de l'espace, les forces subies par le dipôle  $(-q, +q)$  seront  $-q\vec{E}$  et  $+q\vec{E}$  et donc la somme des forces sera nulle<sup>1</sup>.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au système de deux particules que forme le dipôle, en notant  $G$  leur centre de gravité

$$(m_N + m_P) \vec{a}_{\mathcal{R}}(G) = \vec{0}, \quad (\text{II.25})$$

dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Donc  $\vec{V}_{\mathcal{R}}(G) = \overrightarrow{\text{Cte}}$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .

1. au sens des forces extérieures au système.

#### 4.2. Moment des forces

Soit  $A$  un point quelconque de l'espace et  $\vec{\mathcal{M}}_A$  le moment des forces dues à  $\vec{E}$  (supposé uniforme) par rapport à  $A$

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AN} \wedge (-q\vec{E}) + \overrightarrow{AP} \wedge (+q\vec{E}), \quad (\text{II.26})$$

$$= \overrightarrow{NP} \wedge q\vec{E}. \quad (\text{II.27})$$

En notant  $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$  le moment dipolaire, on obtient

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{p} \wedge \vec{E}}. \quad (\text{II.28})$$

Remarque : le moment est indépendant du point  $A$  par rapport auquel il est calculé.

#### 4.3. Équilibre

On a  $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{0}$  pour  $\theta = (\vec{p}, \vec{E}) = 0[\pi]$ . Pour  $\theta = 0$ , l'équilibre est stable, mais en revanche pour  $\theta = \pi$  il est instable.

### 5. Développement multipolaire

Toute distribution de charges  $\{q_i\}$  telle que  $\sum_{i=1}^N q_i = 0$  peut être modélisée par un dipôle.

Soit  $q_i^+$  les charges positives et  $q_i^-$  les charges négatives. On a donc

$$q = \sum q_i^+ = -\sum q_i^-. \quad (\text{II.29})$$

Soient  $M_i^+$  et  $M_i^-$  les emplacements respectifs des  $q_i^+$  et  $q_i^-$ ,  $N$  le barycentre des charges négatives (*i.e.* le barycentre des  $M_i^-$  affectés des  $q_i^-$  comme pondération) et  $P$  le barycentre des charges positives (*i.e.* le barycentre des  $M_i^+$  affectés des  $q_i^+$  comme pondération).

En première approximation, le système  $\{q_i\}$  peut être considéré en première approximation comme un dipôle  $(N, P)$  de charges  $(-q)$  et  $(+q)$  et de moment dipolaire

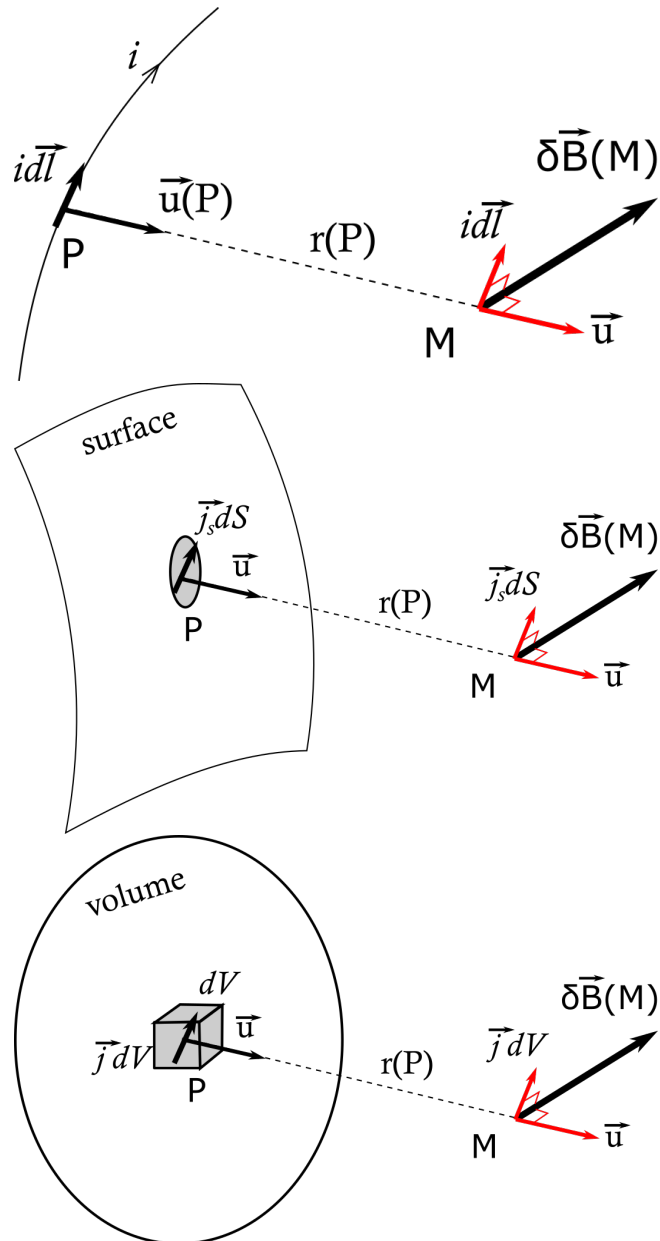
$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP}. \quad (\text{II.30})$$

Remarque : si  $N$  et  $P$  sont confondues, on peut développer le potentiel à un ordre supérieur et obtenir une distribution d'ordre supérieur (quadrupole, hexapole, etc...).

# III. Champ magnétique

## 1. Loi de Biot et Savard

En régime statique, le champ crée par une répartition de courant peut être calculé à partir de la loi de Biot et Savard.



**Fig. III.1.** Champ d'une distribution linéique, surfacique et volumique de charge.

### 1.1. Champ créé par une répartition linéique de courants

Soit un fil parcouru par un courant  $i$ , et  $d\vec{l}$  un élément orienté du fil en un point  $P$  de l'espace (dont l'orientation est imposée par le sens algébrique du courant). Pour tout point  $M$  de l'espace, on définit le vecteur unitaire

$$\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|}, \quad (\text{III.1})$$

et la distance  $r(P) = \|\vec{PM}\|$ . Soit  $d\vec{B}$  le champ magnétique élémentaire créé par un l'élément de courant  $id\vec{l}$  (portion élémentaire de fil parcourue par  $i$ ). On a alors  $\vec{B}(M)$  le champ magnétique créé par la distribution totale  $\mathcal{C}$  en  $M$  selon

$$\vec{B}(M) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{l} \wedge \vec{u}(P)}{r(P)^2}. \quad (\text{III.2})$$

### 1.2. Champ créé par une répartition surfacique de courants

Soit une distribution surfacique de courant, de vecteur densité de courant  $\vec{j}_S$ ,  $dS$  un élément de surface non orienté.

Le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par la distribution totale  $\mathcal{S}$  en  $M$  selon

$$\vec{B}(M) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_S \cdot dS \wedge \vec{u}(P)}{r(P)^2}. \quad (\text{III.3})$$

### 1.3. Champ créé par une répartition volumique de courants

Soit une distribution surfacique de courant, de vecteur densité de courant  $\vec{j}$ ,  $dV$  un élément de volume.

Le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par la distribution totale  $\mathcal{V}$  en  $M$  selon

$$\vec{B}(M) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \cdot dV \wedge \vec{u}(P)}{r(P)^2}. \quad (\text{III.4})$$

## 2. Théorème d'Ampère

### 2.1. Enoncé



#### Théorème d'Ampère

Soit un contour fermé  $\mathcal{C}$  orienté, délimitant une surface de l'espace  $\Sigma$ . Soit  $\vec{B}$  le champ magnétique dans l'espace, généré par une distribution de courant. On a alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{surface}}. \quad (\text{III.5})$$

$I_{\text{surface}}$  correspond à la somme des courants traversant la surface orientée  $\Sigma$ , dont le signe est défini par l'orientation du contour  $\mathcal{C}$ .

Le théorème d'Ampère est valable dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. On appelle  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l}$  la circulation du champ magnétique sur le contour orienté  $\mathcal{C}$ .

Le théorème d'Ampère provient de l'équation de Maxwell-Ampère

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (\text{III.6})$$

Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, le terme  $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  et alors  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ . En intégrant cette équation locale, on obtient le théorème d'Ampère.

## 2.2. Symétries et invariances

Les propriétés de symétrie de la répartition de courants permet de simplifier le problème, et de trouver la direction du champ magnétique pour simplifier le problème.

Les propriétés d'invariances dans l'espace permettent de trouver de quelles coordonnées ne dépend pas le module de  $\vec{B}$ .

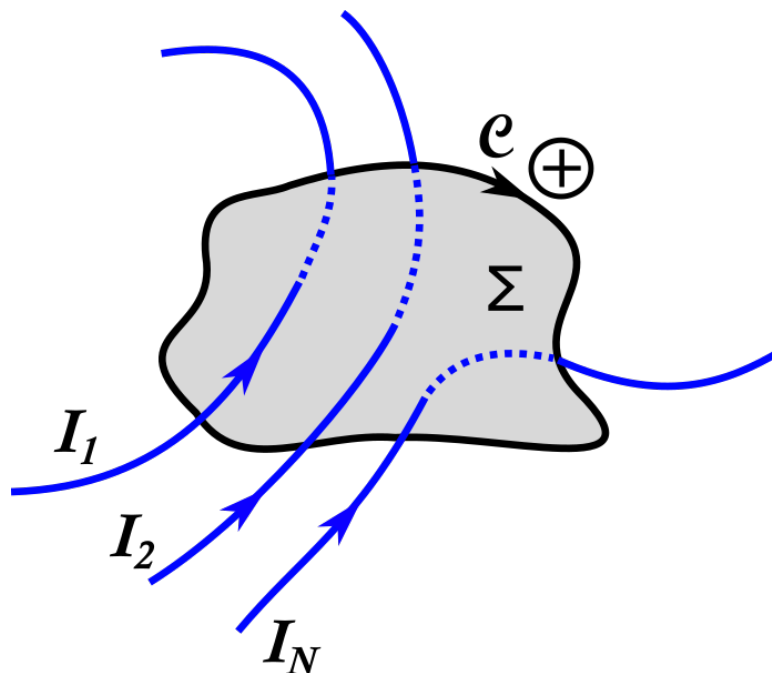
## 2.3. Utilisation du théorème d'Ampère

Pour utiliser le théorème d'Ampère, il faut que la circulation de champ magnétique soit facilement calculable. Cela implique de connaître au préalable certaines caractéristiques du vecteur  $\vec{B}$  (symétries et invariances), et de choisir un contour fermé  $\mathcal{C}$  simple pour une circulation facile à calculer (ex. : un champ à symétrie cylindrique incite à utiliser des cercles de même symétrie pour le choix de contour).

Tous les courants traversant la surface  $\Sigma$  doivent être comptabilisés, qu'ils soient linéiques, surfaciques ou volumiques. Les courants sont comptés algébriquement : le sens algébrique étant donné par l'orientation de la surface  $\Sigma$  qui s'appuie sur le contour; l'orientation du contour et de la surface doivent être compatibles (ex. : règle du tire-bouchon).

### Mise en oeuvre du théorème d'Ampère

- Etudier les invariances et les symétries pour trouver un maximum de caractéristiques du champ ;
- Choisir un contour fermé (imaginaire) pour que le calcul de la circulation soit simple ( $\vec{B}$  tangent ou orthogonal en tout point au contour et dont la norme varie suivant une loi connue, par exemple) ;
- Calculer la circulation ;
- Calculer la somme algébrique de tous les courants traversant la surface  $\Sigma$  s'appuyant sur le contour (faire attention aux orientations) ;
- Ecrire l'égalité des deux termes du théorème d'Ampère ;
- Résoudre l'équation pour obtenir en général le module du champ ;
- En utilisant les renseignements fournis par les invariances et les symétries, en déduire le vecteur  $\vec{B}$ .



**Fig. III.2.** Orientation d'une surface et des courants pour le théorème d'Ampère.

### 3. Moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$

Pour une spire plane parcourue par un courant uniforme  $I$ , le moment magnétique est défini par  $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{\Sigma}$ .

Dans le cas général, le moment magnétique associé à un bobinage délimitant une surface  $\Sigma$ , parcouru par un courant  $I$ , est défini selon

$$\vec{\mathcal{M}} = I \iint_{\Sigma} d\vec{\Sigma}. \quad (\text{III.7})$$

### 4. Le potentiel vecteur $\vec{A}$

Il est défini par la relation suivante

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (\text{III.8})$$

Il peut aussi être calculé directement en l'absence de courants à l'infini (répartitions linéiques, surfaciques ou volumiques finies dans l'espace).

Cas d'une distribution linéique

$$\vec{A}(M) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l}}{r(P)^2}. \quad (\text{III.9})$$

Cas d'une distribution surfacique

$$\vec{A}(M) = \iint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_S d\Sigma}{r(P)^2}. \quad (\text{III.10})$$

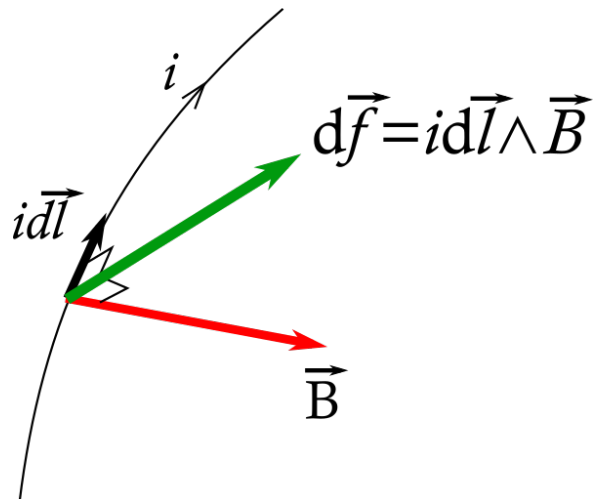
Cas d'une distribution volumique

$$\vec{A}(M) = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} dV}{r(P)^2}. \quad (\text{III.11})$$

# IV. Phénomènes d'induction

## 1. Approche qualitative du phénomène d'induction

### 1.1. Force de Laplace

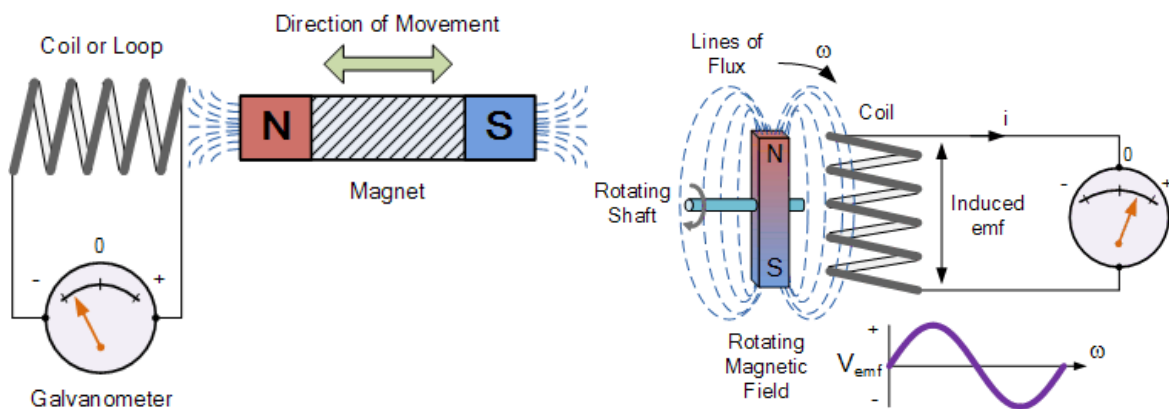


**Fig. IV.1.** Force de Laplace dans le cas d'un circuit filiforme.

Soit un circuit filiforme plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , parcouru par un courant  $I$ . Le champ magnétique exerce sur le fil une *force de Laplace*  $d\vec{f}$  sur tout élément  $d\vec{l}$  du circuit selon

$$d\vec{f} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

### 1.2. Constatations expérimentales



**Fig. IV.2.** Démonstration expérimentale du phénomène d'induction. Cas de circuits mobiles dans un champ magnétique statique.

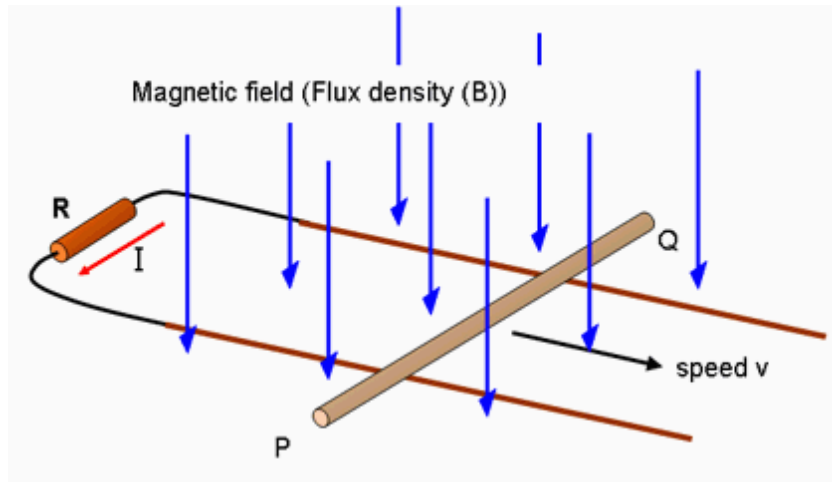


Fig. IV.3. Expérience des rails de Laplace.

### Circuit mobile

Un circuit se déplaçant dans un champ magnétique permanent peut se comporter comme un générateur de tension : *il est le siège d'un phénomène d'induction*. On parle dans ce cas d'induction de Lorentz.

### Champ magnétique variable : l'alternateur

Lorsqu'un circuit fixe est soumis à un champ magnétique variable, il est encore le siège d'un phénomène d'induction. On parle alors de phénomène d'induction de Neumann.

## 2. Induction : circuit fixe dans un champ variable

### 2.1. Loi de Faraday

Équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

On a  $\text{div} \vec{B} = 0$  donc  $\exists \vec{A} | \vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  où  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur. Donc l'équation de Maxwell-Faraday devient

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}.$$

Donc il existe un potentiel scalaire  $V$  tel que

$$\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Calculons la circulation sur un contour  $\Gamma$  fermé

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \underbrace{\oint_{\Gamma} \text{grad} V \cdot d\vec{l}}_{=0} - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l},$$

Appliquons le théorème de Stokes à l'intégrale du membre de droite

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}.$$



On note  $\phi$  le flux de champ magnétique à travers la surface  $\Sigma$  délimitée par le contour  $\Gamma$  et on obtient

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}.$$

### Loi de Faraday

Pour un circuit filiforme, de contour orienté  $\Gamma$ , plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , on note  $\phi$  le flux de champ magnétique à travers une surface  $\Sigma$  prenant pour support le contour  $\Gamma$ . Alors, si  $I$  est le courant du circuit suivant le sens d'orientation de  $\Gamma$ , une f.e.m. induite  $e$ , orientée dans le sens de  $\Gamma$  (convention générateur), apparaît suite à une variation de flux  $\phi$ . On parle de f.e.m. induite, avec

$$e = -\frac{d\phi}{dt}.$$

## 2.2. Principe de l'alternateur

On considère un aimant mis en mouvement de rotation devant une bobine : on a un flux magnétique oscillant. Soit  $B_{\perp}$  la composante du champ normale à la surface de la bobine. On a alors

$$B_{\perp} = B_0 \cos \omega t.$$

La spire est un bobinage de résistance équivalente  $R$ . On a alors un courant circulant dans la bobine  $I$  selon la loi d'Ohm

$$I = \frac{e}{R} = \frac{B_0 S \omega}{R} \sin \omega t.$$

On obtient ainsi un courant alternatif à la fréquence de rotation  $\omega$ . C'est le principe de base qui est à l'origine toutes les centrales de production électrique, qu'elles soient hydroélectriques, thermiques ou nucléaires.

## 3. Induction : circuit mobile indéformable dans un champ fixe

### 3.1. Changement de référentiel

On considère le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, où le champ magnétique est fixe, mais le circuit étudié est mobile, et  $\mathcal{R}'$  le référentiel du circuit. Le circuit est supposé indéformable. Soit  $\vec{v}$  la vitesse d'une particule de charge  $q$  dans  $\mathcal{R}$  et  $\vec{v}'$  dans  $\mathcal{R}'$ . On note  $\vec{v}_e$  la vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  (vitesse d'entraînement).

On note  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  (respectivement  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$ ) les champs électriques et magnétiques dans le référentiel  $\mathcal{R}$  (respectivement  $\mathcal{R}'$ ). On peut montrer que

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \vec{B}.$$

### 3.2. Circuit mobile dans un champ fixe - cas de Lorentz

Soit une portion de circuit  $\mathcal{C}$  situé en M à l'instant  $t$ , dont on note  $\vec{v}'$  la vitesse des porteurs dans  $\mathcal{R}'$  à l'instant  $t$ . Dans le référentiel du laboratoire, ces porteurs ont une vitesse

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e.$$

Dans le référentiel du laboratoire, le champ est statique donc

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}.$$

On a donc la relation champ électrique - potentiel électrique qui se simplifie en

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V.$$

Ainsi, dans le référentiel du conducteur  $\mathcal{R}'$ , on a le champ électrique s'exerçant sur les porteurs de charge selon

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} = -\overrightarrow{\text{grad}}V + \vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$

Ainsi, le terme

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B},$$

appelé **champ électromoteur** provoque un déplacement de porteurs de charge, d'origine physique le champ magnétique  $\vec{B}$  et la vitesse du circuit  $\vec{v}_e$ . Il va être à l'origine de la f.e.m. induite. Entre deux points A et B, la circulation de ce champ donnera la f.e.m. induite entre ces points

$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{v}_e \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

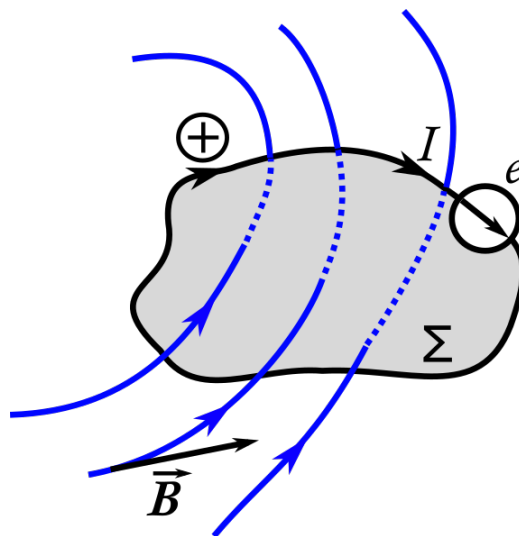
Pour un circuit fermé,

$$e_{AB} = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \oint \vec{v}_e \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

## 4. Force électromotrice induite

### 4.1. Orientations du circuit (important)

Dans un problème d'induction, **il faut toujours définir les orientations du circuit, des courants et des f.e.m. induites!**



**Fig. IV.4.** Orientation d'une surface et d'un circuit filiforme fermé dans le contexte de l'induction électromagnétique. La variation de flux magnétique induit une f.e.m.  $e$ .

Par exemple, on considère le circuit de la figure IV.4. Le circuit est orienté positivement selon le symbole  $\oplus$  et la flèche d'orientation associée indiquée sur le circuit. Ce circuit définit une surface  $\Sigma$  quelconque mais prenant pour support le contour défini par le circuit. L'orientation positive de la surface est définie par l'orientation du contour et la règle du tire-bouchon. Les courants sont orientés positivement dans le sens d'orientation du circuit. La f.e.m. induite est orientée positivement en convention générateur, c'est-à-dire dans le même sens que le courant (et par conséquent le circuit).

## 4.2. Induction dans un conducteur ohmique

Des équations de Maxwell, on a obtenu

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} V. \quad (\text{IV.1})$$

On voit ici comment la relation habituelle de l'électrostatique liant champ et potentiel est modifiée si l'on ne se place pas dans l'ARQS. On considère un circuit AB filiforme. En utilisant les approximations adéquates pour un circuit filiforme, on montre que  $V_A - V_B = Ri - e$  où  $R$  est la résistance du circuit et

$$e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}, \quad (\text{IV.2})$$

avec

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (\text{IV.3})$$

La f.e.m. induite  $e$  est en convention générateur par rapport à l'orientation du circuit (même orientation que le courant).

On distingue deux cas d'étude, étudiés précédemment comme cas limites.

— **Circuit immobile dans un champ variable** : on a alors

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (\text{IV.4})$$

et on peut en déduire après calcul

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (\text{IV.5})$$

**pour un circuit fermé (A=B).**

— **Circuit mobile dans un champ permanent** : on a alors  $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$  et une première expression de la f.e.m. induite

$$e = \int_A^B \vec{v} \wedge \vec{B} d\vec{l}. \quad (\text{IV.6})$$

**Pour un circuit AB fermé**, on peut en déduire alors que

$$e = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} d\vec{l}. \quad (\text{IV.7})$$

## 4.3. Loi de Faraday

La loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (\text{IV.8})$$

donne la f.e.m. induite dans un circuit **fermé** lors d'une variation de flux occasionnée par

- soit un champ variable dans un circuit fixe ;
- soit une déformation du circuit dans un champ permanent.

Remarque : dans le cas d'un circuit déformé ET d'un champ variable, elle n'est plus applicable.

**Le circuit et la surface sont orientés et la f.e.m. induite est calculée en convention générateur.**

### Mise en oeuvre de la loi de Faraday

- Vérifier que l'on est bien dans l'un des deux cas : circuit fixe et champ variable, ou circuit mobile et champ permanent.
- Orienter le circuit (orientation arbitraire) : cette orientation impose celles de la fem et de la surface ayant pour support le circuit.
- Orienter la f.e.m. en convention générateur.
- Orienter la surface définie par le contour en cohérence avec celle de ce dernier (règle de la main droite, tire-bouchon, bonhomme d'Ampère, au choix).

- Calculer le flux  $\Phi$  de  $\vec{B}$  à travers la surface  $\Sigma$

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} \quad (\text{IV.9})$$

est une grandeur algébrique et son signe va dépendre de l'orientation de la surface.

- Calculer la dérivée du flux  $\Phi$ .
- Appliquer la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (\text{IV.10})$$

où  $e$  est en convention générateur ; c'est aussi une grandeur algébrique.

#### 4.4. Loi de Lenz

Le signe moins de la loi de Faraday résulte des conventions utilisées pour orienter la surface du circuit et définir la f.e.m. algébrique et, physiquement, de l'effet modérateur du courant induit.

La loi de Lenz traduit qualitativement cet effet. Elle permet de prévoir le sens du courant induit dans les cas simples et de vérifier son signe une fois le calcul algébrique effectué.

#### Loi de Lenz

| Le courant induit a un sens tel que le flux induit qu'il crée s'oppose aux variations du flux inducteur.

#### 4.5. Champ électromoteur

On considère ici le cas du circuit mobile dans un champ permanent. La f.e.m.  $e$  peut être calculée par la circulation du champ électromoteur

$$e = \int_A^B \vec{E}_m d\vec{l}, \quad (\text{IV.11})$$

avec

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}, \quad (\text{IV.12})$$

car le terme  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  est nul, et  $d\vec{l}$  est un élément orienté du circuit. La f.e.m. est toujours en convention générateur. Le circuit n'est pas nécessairement fermé.

#### Circulation du champ électromoteur

- Vérifier que l'on est bien dans le cas d'un circuit mobile et d'un champ permanent. Orienter le circuit (orientation arbitraire) ; cette orientation impose celle de la f.e.m..
- Orienter la f.e.m. en convention générateur.
- Calculer  $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ .
- Calculer sa circulation de A à B : on obtient ainsi  $e$ .

## 5. Induction mutuelle - autoinduction

### 5.1. Induction mutuelle

On considère deux circuits  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , parcourus par des courants  $I_1$  et  $I_2$ . Le courant  $I_1$  (resp.  $I_2$ ) produit dans l'espace un champ  $B_1(\vec{r})$  (resp.  $B_2(\vec{r})$ ). Le flux généré par le champ  $B_1(\vec{r})$  à travers le circuit  $\mathcal{C}_2$  (de surface  $S_2$ ) est noté  $\Phi_{12}$

$$\Phi_{12} = \iint_{\mathcal{C}_2} B_1(\vec{r}) \cdot d\vec{S}_2.$$

Le flux généré par le champ  $B_2(\vec{r})$  à travers le circuit  $\mathcal{C}_1$  (de surface  $S_1$ ) est noté  $\Phi_{21}$

$$\Phi_{21} = \iint_{\mathcal{C}_1} B_2(\vec{r}) \cdot d\vec{S}_1.$$

On peut montrer que

$$\Phi_{12} = MI_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{21} = MI_2,$$

où  $M$  est le **coefficient d'induction mutuelle** entre les deux circuits. Ce dernier ne dépend que de la géométrie.

## 5.2. Autoinduction

On considère une spire parcourue par un courant  $I$ , générant un champ magnétique  $\vec{B}$ . Ce champ magnétique génère un flux  $\Phi$  à travers la spire, proportionnel à  $B$  et donc à  $I$ . La relation entre le flux et le courant est linéaire, définissant l'**autoinductance** du circuit

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

Il s'agit de l'équivalent de la capacité en électrostatique

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Lorsque deux circuits  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , d'autoinductance respectives  $L_1$  et  $L_2$ , sont couplés par un coefficient d'induction mutuelle  $M$ , on peut montrer que

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}.$$

On définit alors  $k \in [0, 1]$  le coefficient de couplage des deux circuits selon

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

### Exemple : calcul de l'autoinductance d'un solénoïde

Dans un solénoïde de densité linéique de spire  $n$ , parcouru par un courant  $I$ , dans l'approximation du solénoïde infini le champ  $B$  à l'intérieur est homogène et  $B = \mu_0 n I$ . Alors, pour un solénoïde de longueur  $l$ , le flux magnétique total  $\phi$  à travers le solénoïde vaut

$$\phi = B n l S = \mu_0 n^2 l S I,$$

avec  $S$  la section du solénoïde. On obtient alors le coefficient d'autoinduction d'un solénoïde de densité linéique de spires  $n$ , de longueur  $l$  et de section  $S$

$$L = \mu_0 n^2 l S.$$

On remarquera que le coefficient d'autoinduction ne dépend que de la géométrie du circuit.

Désormais on se place en convention récepteur du point de vue électrique pour la bobine. Ainsi, le sens positif du flux est défini par le sens positif du courant. Alors

$$\Phi = BS = LI.$$

Et d'après la loi de Faraday, une f.e.m. est induite aux bornes de la spire, **en convention générateur**, selon

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Soit  $U$  la tension aux bornes de la bobine **en convention récepteur** :  $U = -e$ , soit

$$U = L \frac{dI}{dt}.$$

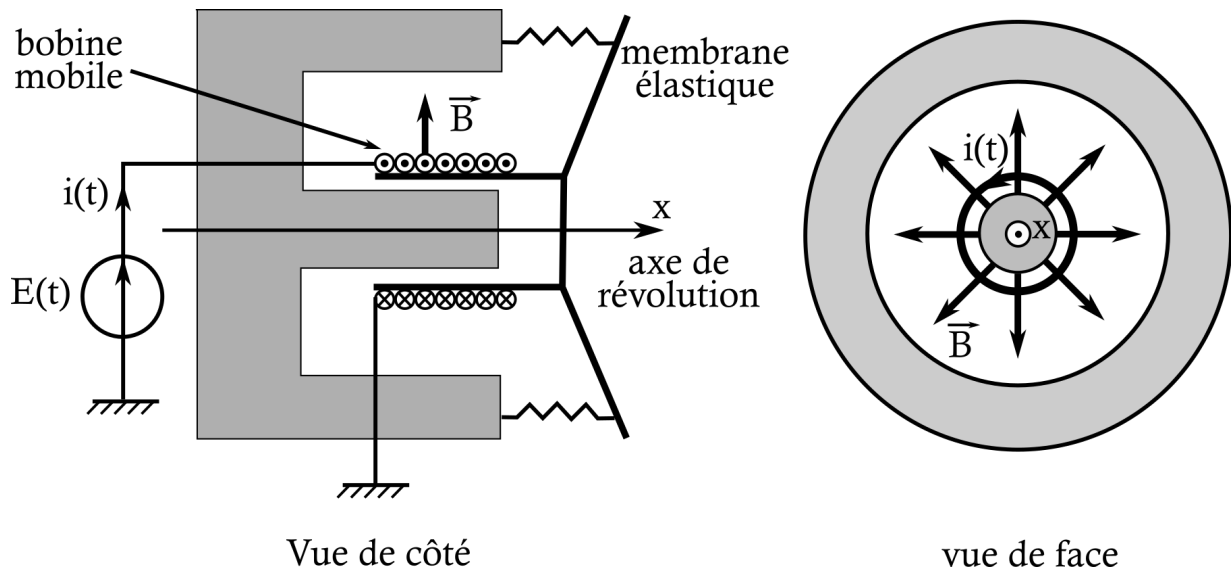


Fig. IV.5. Description schématique d'un haut-parleur

## 6. Couplage électromécanique : le haut-parleur

### 6.1. Description

Un haut-parleur est représenté schématiquement figure IV.5. Ce dernier est constitué d'un aimant permanent à symétrie cylindrique d'axe  $Ox$ . Ce dernier génère un champ magnétique  $\vec{B}$  homogène dans l'entrefer en norme, mais radial en direction selon  $\vec{B} = B\vec{u}_r$ , où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire radial du système de coordonnées cylindriques. Un bobinage de fil de cuivre est solidaire de la membrane du haut-parleur, cette dernière étant solidaire mécaniquement de l'aimant permanent, par une liaison que l'on modélise par un ressort. Lorsqu'un courant électrique parcourt la bobine, la force de Laplace induit un déplacement de cette dernière et donc de la membrane. C'est le fonctionnement haut-parleur, où une grandeur électrique est convertie en grandeur mécanique. Le processus est réversible. Ainsi, tout mouvement de la membrane (induit par une onde sonore) résulte en un déplacement de la membrane et donc du bobinage dans un champ magnétique statique. Il apparaît donc une f.e.m. d'induction aux bornes du bobinage ; c'est le principe du microphone.

### 6.2. Équation mécanique

Dans l'entrefer de l'aimant, il règne un champ magnétique radial

$$\vec{B} = B\vec{u}_r,$$

où  $B$  est constant tant que l'on est dans l'entrefer. Le système bobinage+membrane possède une masse totale  $m$  et peut être mis en mouvement par l'action d'une force extérieure  $F\vec{u}_x$ . On note  $x$  la position de la membrane, tel que  $x = 0$  quand la membrane est à l'équilibre à courant nul  $i = 0$ . Il subit en outre des forces de frottement dissipatives de la forme

$$\vec{F}_{frott} = -h\dot{x}\vec{u}_x,$$

les forces de rappel de la membrane de la forme

$$\vec{F}_{rappel} = -kx\vec{u}_x,$$

ainsi que les sommes des forces de Laplace. Pour un élément du bobinage  $d\vec{l} = dl\vec{u}_\theta$ , on a

$$d\vec{F}_L = idl\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_x = -iBdl\vec{u}_x,$$

d'où l'expression de la force de Laplace

$$\vec{F}_L = -iBl\vec{u}_x,$$

où  $l$  est la longueur totale du bobinage.

En appliquant le Principe Fondamentale de la Dynamique au système bobinage+membrane, projeté sur l'axe  $\vec{u}_x$ , on obtient

$$m\ddot{x} = -h\dot{x} - kx - Bli + F,$$

où  $F$  est une force extérieure appliquée. On obtient l'équation mécanique (M) du système

$$\boxed{m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = -Bli + F}.$$

### 6.3. Équation électrique

Soit  $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$  la vitesse de la membrane. On note  $v = \dot{x}$ . On a un circuit en mouvement dans un champ magnétique statique. Il faut évaluer le champ électromoteur

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = Bv\vec{u}_\theta.$$

On obtient la f.e.m. induite  $e$  dans le bobinage selon

$$e = \int_{\text{bobinage}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l},$$

or, le long du bobinage,  $d\vec{l} = dl\vec{u}_\theta$  et  $Bv$  est constant à un instant donné, donc

$$e = \int_{\text{bobinage}} Bv\vec{u}_\theta \cdot dl\vec{u}_\theta = \int_{\text{bobinage}} Bv dl.$$

En notant  $l$  la longueur totale de bobinage,

$$e = Blv.$$

Le bobinage est modélisé électriquement par l'association série de la résistance du bobinage  $R$  et d'une bobine d'autoinduction  $L$ . La loi des mailles donne alors l'équation électrique (E) du système

$$\boxed{L \frac{di}{dt} + Ri = Blv + E},$$

où  $i$  est le courant parcourant la bobine et  $E$  la tension externe appliquée au bobinage.

### 6.4. Conversion électromécanique

En effectuant la combinaison (M) ·  $v$  + (E) ·  $i$ , on obtient

$$(m\ddot{x} + h\dot{x} + kx)v + \left( L \frac{di}{dt} + Ri \right) i = \underbrace{Blvi - Bliv}_{=0} + Fv + Ei,$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m \frac{dv^2}{dt} + \frac{1}{2}k \frac{dx^2}{dt} + hv^2 + \frac{1}{2}L \frac{di^2}{dt} + Ri^2 = Fv + Ei.$$

En définissant  $E_{\text{méca}}$  l'énergie mécanique du système

$$E_{\text{méca}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

et  $E_{\text{élec}}$  son énergie électrique

$$E_{\text{élec}} = \frac{1}{2}Li^2,$$

on obtient

$$\boxed{\frac{dE_{\text{méca}}}{dt} + \frac{dE_{\text{élec}}}{dt} = Fv + Ei - \underbrace{Ri^2 - hv^2}_{\text{énergie dissipée}}}.$$

Cette relation traduit la conservation de l'énergie. L'énergie électrique  $E_{\text{élec}}$  peut être convertie en énergie mécanique  $E_{\text{méca}}$  et vice-versa. L'énergie totale du système peut varier à l'aide d'une source extérieure soit d'origine mécanique (terme  $Fv$ ), soit d'origine électrique (terme  $Ei$ ). L'énergie du système est dissipée sous forme mécanique (terme de frottement fluide  $-hv^2$ ) et sous forme électrique (terme de perte résistives  $-Ri^2$ ).

### 6.5. Impédance motionnelle

On se place en régime sinusoïdal à la pulsation  $\omega$ , avec les grandeurs électriques complexe  $\underline{i}$  et  $\underline{E}$ , et les grandeurs mécaniques  $\underline{x}$  et  $\underline{v}$ . En l'absence de force extérieure ( $F = 0$ ), l'équation mécanique devient

$$(-m\omega^2 + hj\omega + k)\underline{x} = -Bl\underline{i},$$

d'où l'expression de  $\underline{x}$  en fonction de  $\underline{i}$

$$\underline{x} = \frac{Bl}{m\omega^2 - hj\omega - k}\underline{i}.$$

L'équation électrique en régime sinusoïdal devient

$$(j\omega L + R)\underline{i} = \underline{E} + Bl\underline{v} = \underline{E} + Blj\omega\underline{x}.$$

En remplaçant  $\underline{x}$  par son expression en fonction de  $\underline{i}$ , on obtient

$$\begin{aligned} (j\omega L + R)\underline{i} &= \underline{E} + j\omega \frac{B^2 l^2}{m\omega^2 - hj\omega - k}\underline{i}, \\ \Leftrightarrow \underline{E} &= (j\omega L + R)\underline{i} + j\omega \frac{B^2 l^2}{hj\omega + k - m\omega^2}\underline{i}, \\ \Leftrightarrow \underline{E} &= \left( j\omega L + R + \frac{B^2 l^2}{h + j(m\omega - \frac{k}{\omega})} \right)\underline{i}. \end{aligned}$$

On note

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

la pulsation caractéristique du système masse-ressort du système. On obtient alors le comportement électrique équivalent du haut-parleur à force extérieure nulle de la forme

$$\underline{E} = (R + jL\omega + \underline{Z}_m)\underline{i},$$

où  $\underline{Z}_m$  est l'**impédance motionnelle** du haut-parleur, d'expression

$$\underline{Z}_m = \frac{B^2 l^2}{m \left( \frac{h}{m} + j\omega \left( 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right) \right)}.$$

Du point de vue électrocinétique, tout se passe comme si, en raison du couplage électromécanique, venait s'ajouter une impédance électrique supplémentaire (l'impédance motionnelle), caractérisant le couplage électromécanique.

Cette impédance présente une résonance pour la pulsation  $\omega = \omega_0$ . Il faudra choisir une structure mécanique telle que cette résonance soit en dehors de la bande passante utile du point de vue sonore. En pratique, la fréquence de résonance motionnelle est typiquement de quelques dizaines de hertz, alors que la gamme audible se situe entre 20 Hz et 20 kHz.

## 7. Quelques expériences possibles

### 7.1. Mise en évidence qualitative des principales caractéristiques de la loi de Faraday

Matériel :

- galvanomètre ou microampèremètre (continu) de préférence à zéro central ;
- un fil à brancher en "court-circuit" sur l'appareil de mesure ;
- un aimant.



### Circuit fixe dans un champ magnétique variable

Brancher le fil en "court-circuit" sur l'appareil de mesure. Orienter le circuit en repérant le sens de la déviation de l'aiguille de l'appareil de mesure pour un sens de circulation du courant donné (ou un sens de tension mesurée donné). Approcher l'aimant du circuit fixe de façon à créer une variation de flux en repérant le sens du champ et l'orientation du circuit, donc le signe de la variation de flux. Visualiser alors le sens de déviation de l'aiguille. Vérifier s'il correspond à un signe de f.e.m. conforme à la loi de Faraday. Retirer l'aimant et réitérer l'opération. Recommencer en approchant l'autre pôle de l'aimant. Répéter l'opération en modifiant la vitesse de déplacement de l'aimant.

L'objet de cette expérience n'est pas de "vérifier" la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (\text{IV.13})$$

Mais on peut en déduire certaines caractéristiques qualitatives de la loi de l'induction : signe (attention aux orientations), variations de flux, dérivation (vitesse de variation de flux).

### Circuit mobile dans un champ magnétique permanent

Déformer le circuit en présence de l'aimant fixe. Réaliser une étude similaire à la précédente. On peut, pour plus de commodité, utiliser ici le rail de Laplace comme circuit déformable.

#### 7.2. Mise en évidence quantitative de la loi de Faraday

Il s'agit de se placer dans des conditions expérimentales simples pour vérifier dans un cas particulier la loi de Faraday. Il nous faut donc un flux facilement calculable ou mesurable et dont la dérivée soit également facile à détecter.

Pour cela, on utilise un flux triangulaire dont la dérivée donne un signal de tension créneaux de même période.

Matériel :

- double solénoïde JEULIN ;
- oscilloscope ;
- générateur basses fréquences ;
- sonde à effet Hall.

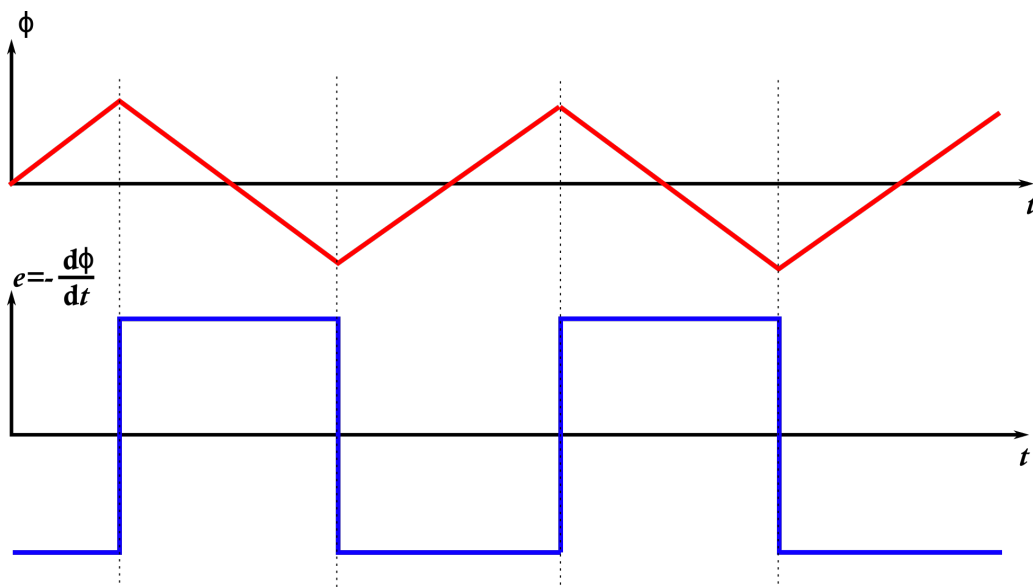


Fig. IV.6. Mise en évidence quantitative de la loi de Faraday

### Réalisation du flux triangulaire

Le flux est donné par

$$\iint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}. \quad (\text{IV.14})$$

Il sera simple à calculer si  $\vec{B}$  est uniforme égal à  $\mu_0 n I$  (approximation du solénoïde infini), avec  $n$  la densité linéique de spires.

*Vérification* : on alimente la bobine A dans toute sa longueur par un courant continu (seul un champ magnétique continu est mesurable par la sonde). On promène la sonde dans la partie centrale du solénoïde afin de repérer la zone de champ uniforme :  $\vec{B}$  y sera égal à  $\mu_0 n I$ . Cette zone sera utilisée comme bobine 2. Le flux à travers cette dernière sera égal à  $B\Sigma$  ( $\Sigma$  surface totale).

*Relation courant/champ* : d'après la loi de Biot et Savart,  $B$  et  $I$  sont proportionnels. On cherchera donc à obtenir un courant triangulaire et on le visualisera. **La tension aux bornes de la bobine 1 ne nous intéresse pas.**

### F.e.m. induite

On visualise la tension induite aux bornes de la bobine 2 (oscilloscope). Comparer ces valeurs expérimentales et théoriques. En déduire le coefficient de mutuelle induction entre les deux bobines.

### Influence de l'auto-induction

Tant que le courant  $I_2$  dans la bobine 2 est nul (circuit ouvert si on considère l'impédance d'entrée de l'oscilloscope comme infinie), il n'y a pas d'auto-induction. Mais si l'on ferme la bobine 2 (sur une résistance par exemple), alors le flux total à travers elle devient

$$\Phi = MI_1 + LI_2, \quad (\text{IV.15})$$

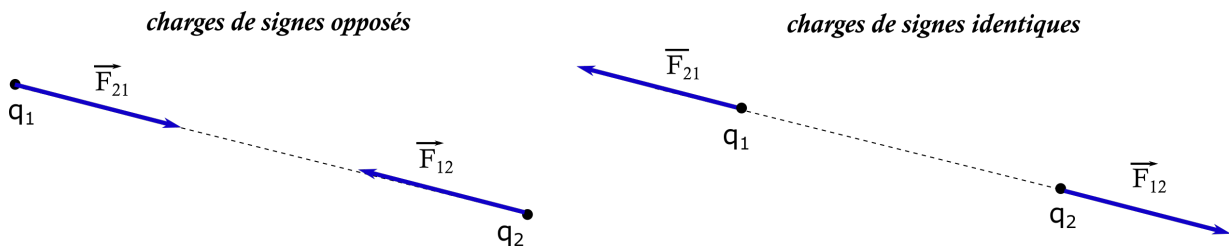
où le terme  $LI_2$  représente le flux propre.

### 7.3. Autre manipulation possible

On peut tracer la f.e.m. induite aux bornes de la bobine 2 en fonction de la fréquence en régime sinusoïdal. Les conditions expérimentales seront les mêmes que celles de la manipulation précédente.

# V. Actions électromécaniques

## 1. Actions découlant du champ électrique



**Fig. V.1.** Forces électrostatiques entre deux charges ponctuelles.

L'action d'une charge  $q_1$  sur une charge  $q_2$  est donnée par

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}, \quad (\text{V.1})$$

avec  $\vec{u}_{12}$  le vecteur unitaire dirigé de  $q_1$  vers  $q_2$  et  $r$  la distance entre  $q_1$  et  $q_2$ . On a également

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1, \quad (\text{V.2})$$

avec

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{12}, \quad (\text{V.3})$$

le champ électrique créé par la charge  $q_1$ .

Par conséquent, si on intervertit les deux charges, on peut définir l'action de  $q_2$  sur  $q_1$  selon

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{21} = -\vec{F}_{12}, \quad (\text{V.4})$$

car  $\vec{u}_{21} = -\vec{u}_{12}$ .

Cette interaction suit bien la 3ème loi de Newton (principe d'action-réaction). Il s'agit d'une interaction de type Newtonienne (en  $1/r^2$ ). De manière générale, une charge  $q$  placée dans un champ électrique  $\vec{E}$  créé par une autre répartition de charges (n'incluant pas  $q$ ) est soumise à une action modélisée par la force  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

## 2. Energie

On se place dans le cas du régime stationnaire (ou de l'ARQS).

### 2.1. Cas de deux charges ponctuelles

La force  $\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1$  dérive d'une énergie potentielle  $U_{12} = q_2 V_1$  où  $V_1$  est le potentiel créé par  $q_1$ . En effet, en régime statique (ou dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires),

$$\vec{E}_1 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_1, \quad (\text{V.5})$$

et donc

$$\vec{F}_{12} = -\overrightarrow{\text{grad}} (q_2 V_1). \quad (\text{V.6})$$

À noter que  $U_{12} = U_{21}$ , ce qui conduit à nommer cette énergie *énergie potentielle d'interaction*.

## 2.2. Charge dans un champ électrique

En régime statique (ou dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires),  $\vec{F} = q\vec{E}$  dérive d'une énergie potentielle  $U = qV$  où  $V$  est le potentiel lié à  $\vec{E}$ . Le travail  $W$  d'une force électrique  $\vec{F}$  appliquée en un point  $M$  et dérivant d'une énergie potentielle  $U$  s'obtient à partir du travail infinitésimal

$$\delta W = -dU, \quad (\text{V.7})$$

avec  $\delta W = \vec{u} \cdot d\vec{OM}$ . Pour un trajet de  $M$  allant de A à B

$$W = \int_A^B \delta W = - \int_A^B dU = U_A - U_B = q(V_A - V_B), \quad (\text{V.8})$$

et ne dépend donc que du potentiel de départ (en A) et de celui d'arrivée (en B).

Remarque : dans le cas de l'ARQS,

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad (\text{V.9})$$

et  $\vec{E} = -\text{grad} V$ , ce qui donne

$$\int_A^B \vec{E}(M) d\vec{l}(M) = V_A - V_B. \quad (\text{V.10})$$

### Définition de l'électron-volt

1eV est l'énergie acquise par une charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$  accélérée sous une ddp de 1 volt.

$$1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C} \times 1\text{V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J}. \quad (\text{V.11})$$

L'énergie électrostatique stockée dans un condensateur vaut

$$W_E = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (\text{V.12})$$

L'énergie magnétique stockée dans une bobine vaut

$$W_B = \frac{1}{2} LI^2. \quad (\text{V.13})$$

## 3. Actions découlant d'un champ magnétique

Une charge  $q$  se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est soumise à une force dite de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}, \quad (\text{V.14})$$

où l'on remarque que la force  $\vec{F}$  est orthogonale à la vitesse  $\vec{v}$  de la charge.

Par conséquent, le travail de cette force est nul

$$\delta W = (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{OM} = 0. \quad (\text{V.15})$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique,  $\delta W = dE_C$ . Et donc  $dE_C$  sera nulle et l'énergie cinétique  $E_C = \frac{1}{2}mv^2$  constante donc  $v = \|\vec{v}\|$  est constante.

**Le champ magnétique, contrairement au champ électrique, n'apporte aucune énergie à la particule de charge  $q$ .**

**Force de Laplace**

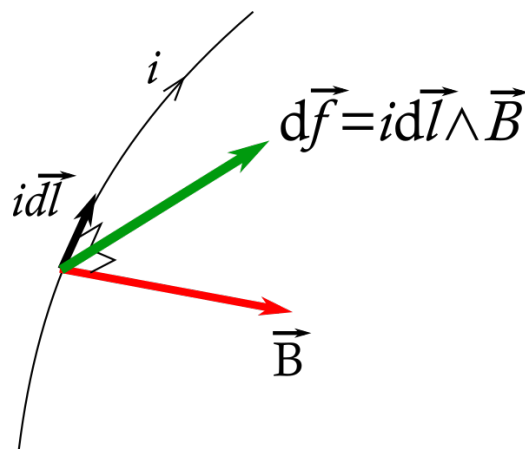
Un conducteur filiforme parcouru par un courant  $I$  et placé dans un champ magnétique est soumis en chacun de ses points à une force de Laplace. Elle est définie localement par la force élémentaire appliquée à un élément de longueur  $d\vec{l}$  orienté par le courant  $I$  (convention d'orientation algébrique)

$$d\vec{f} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}. \tag{V.16}$$

La totalité du conducteur sera soumise à

$$\vec{F} = \int_{\text{conducteur}} d\vec{f} = \int_{\text{conducteur}} Id\vec{l} \wedge \vec{B}. \tag{V.17}$$

Ceci est la résultante et la force est répartie sur l'ensemble du conducteur. Si le courant est le même sur tout le circuit (ARQS) et que le circuit est indéformable, alors le point d'application peut être assimilé au milieu du conducteur.



**Fig. V.2.** Force de Laplace exercée par un champ magnétique  $\vec{B}$  sur un élément de circuit filiforme  $d\vec{l}$ .

#### 4. Dipôles électrostatique et magnétique

Résultante du moment des forces appliquées par un champ électrique  $\vec{E}$  à un dipôle électrique de moment dipolaire  $\vec{P}$

$$\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E}. \tag{V.18}$$

Résultante du moment des forces appliquées par un champ magnétique  $\vec{B}$  à un dipôle magnétique de moment dipolaire  $\vec{M}$

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}. \tag{V.19}$$

Energie potentielle d'un dipôle électrique de moment dipolaire  $\vec{P}$  dans un champ électrique  $\vec{E}$  (somme des énergies potentielles dont dérivent les forces électrostatiques)

$$E_P = -\vec{P} \cdot \vec{E}. \tag{V.20}$$

Energie potentielle d'un dipôle magnétique de moment dipolaire  $\vec{M}$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  (somme des énergies potentielles dont dérivent les forces magnétiques)

$$E_P = -\vec{M} \cdot \vec{B}. \tag{V.21}$$